

## Cálculo de una estructura: celosía hiperestática

Resolver la celosía hiperestática de la figura siguiente (fig. 1). Hallar los desplazamientos en los nudos. Los datos son:

$L = 2 \text{ m}$	$A = 10 \text{ cm}^2$	$E = 2.1 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$	$F = 5000 \text{ kg}$
-------------------	-----------------------	--	-----------------------

Úsense:

- 1) Ecuaciones fundamentales de la mecánica.
- 2) Métodos clásicos de resolución (teorema de Castigliano con programa Anesclas).
- 3) Métodos matriciales por MEF (método elementos finitos con programa Anesmf).

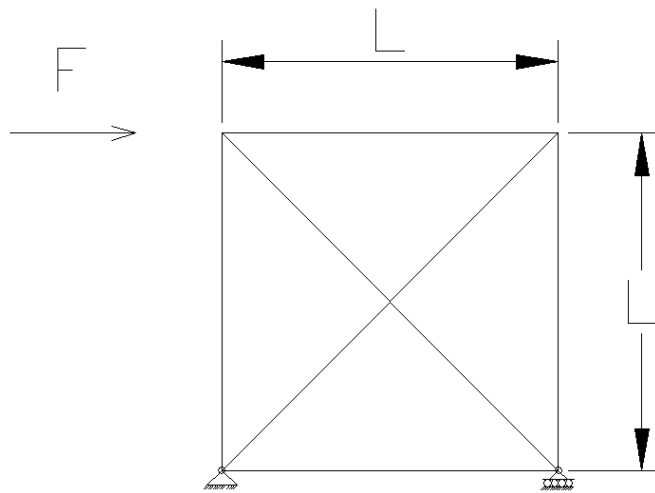


Fig. 1. Celosía hiperestática

Primero, definimos los nudos y los elementos barra.

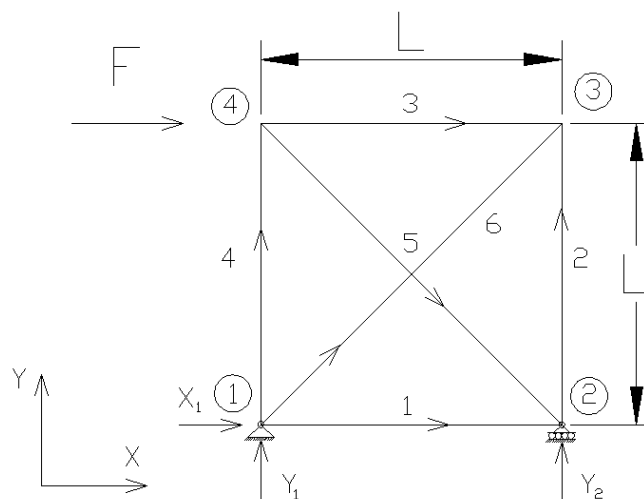


Fig. 2. Nudos, barras y reacciones

## 1) Ecuaciones fundamentales de la mecánica.

### Longitud de las barras.

$$L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 2 \text{ m} \quad L_5 = L_6 = 2\sqrt{2}$$

### Nº incógnitas.

$$I = b + 2n + r$$

1

siendo:

$I = \text{nº incógnitas}$	$b = \text{número de barras}$	$n = \text{nº de nudos}$	$r = \text{nº de restricciones}$
----------------------------	-------------------------------	--------------------------	----------------------------------

El nº de incógnitas es, según ec. 1:

$$I = 6 + 2 \cdot 4 + 3 = 17$$

### Grado de hiperestaticidad.

En el caso de esta estructura, si  $GH$  (que se va a definir a continuación), es mayor que 0, la estructura será hiperestática.

$$GH = b + r - 2n \quad 2$$

$$GH = GE + GI \quad 3$$

$$GE = r - 3 \quad 4$$

$$GE = 0 \text{ (estructura externa isostática)}$$

El grado de hiperestaticidad es:

$$GH = 6 + 3 - 2 \cdot 4 = 1 > 0 \text{ (hiperestática de grado 1)}$$

$$GI = GH - GE \quad 5$$

$$GI = 1 \text{ (estructura interna hiperestática)}$$

Tenemos 17 incógnitas por lo que buscaremos las ecuaciones poco a poco.

### Ecuaciones de contorno.

Generalmente suele ser una por cada coacción en los apoyos, debidas a la reacción que ejercen.

$$\begin{cases} u_1 = 0 \Leftrightarrow \text{reacción } X_1 \\ v_1 = 0 \Leftrightarrow \text{reacción } Y_1 \\ v_2 = 0 \Leftrightarrow \text{reacción } Y_2 \end{cases}$$

### Ecuaciones de equilibrio de nudos.

Se emplea el diagrama de sólido libre en cada nudo, poniendo las reacciones normales y los esfuerzos en cada barra por convenio a tracción (saliendo del nudo). Un signo negativo en la solución supondrá, pues, que cualquier

sección transversal de dicha barra trabaja realmente a compresión.

$$\alpha = \beta = 45^\circ$$

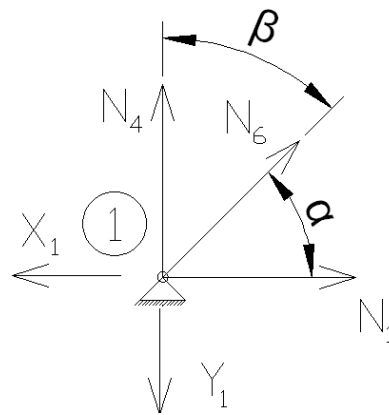


Fig. 3. Nudo 1

$$\text{Nudo 1} \begin{cases} -X_1 + N_1 + N_6 \cos \alpha = 0 \rightarrow N_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} N_6 = X_1 \\ -Y_1 + N_4 + N_6 \sin \alpha = 0 \rightarrow N_4 + \frac{\sqrt{2}}{2} N_6 = Y_1 \end{cases} \quad 6$$

Análogamente para el resto de nudos, y tras dibujar los diagramas de esfuerzo libre de los nudos aparte (se omite) para obtener las ecuaciones, queda:

$$\text{Nudo 2} \begin{cases} -N_1 - N_5 \cos \alpha = 0 \rightarrow -N_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} N_5 = 0 \\ Y_2 + N_2 + N_5 \sin \alpha = 0 \rightarrow N_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} N_5 = Y_2 \end{cases} \quad 7$$

$$\text{Nudo 3} \begin{cases} -N_3 - N_6 \cos \alpha = 0 \rightarrow -N_3 - \frac{\sqrt{2}}{2} N_6 = 0 \\ -N_2 - N_6 \sin \alpha = 0 \rightarrow -N_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} N_6 = 0 \end{cases} \quad 8$$

$$\text{Nudo 4} \begin{cases} F + N_3 + N_5 \cos \alpha = 0 \rightarrow N_3 + \frac{\sqrt{2}}{2} N_5 = -5000 \\ -N_4 - N_5 \sin \alpha = 0 \rightarrow -N_4 - \frac{\sqrt{2}}{2} N_5 = 0 \end{cases} \quad 9$$

Los esfuerzos, fuerzas y reacciones se consideran positivos o negativos según los ejes coordenados. Para calcular bien las ecs. anteriores se ha tenido en cuenta el sentido del esfuerzo de acuerdo a la fig. 2, cambiando a las reacciones de sentido, ya que estaban puestas trabajando a compresión, si el valor obtenido finalmente es positivo. En definitiva, para establecer bien las ecuaciones nodales, **todos los esfuerzos y fuerzas deben ser salientes**, como en la fig. 3 para el nudo 1.

### Ecuaciones de las leyes de comportamiento.

Sabemos que el comportamiento lineal elástico en las barras da una relación  $E_i$  entre las tensiones aplicadas  $\sigma_i$  y las deformaciones obtenidas  $\varepsilon_i$ . Esto se expresa mediante la ecuación:

$$E_i = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} = \frac{N_i}{\frac{\Delta L_i}{L_i}} \quad 10$$

De la ec. 10 se obtiene el comportamiento de las barras de celosía para la barra  $i$ ésima:

$$N_i = A_i E_i \frac{\Delta L_i}{L_i} \quad 11$$

donde:

$N_i$ = esfuerzos axiles
$A_i$ = área de la sección
$E_i$ = módulo elástico
$\Delta L_i$ = alargamiento (o deformación)
$L_i$ = longitud de la barra

El signo de cada  $N_i$  lo dará el alargamiento (+) o acortamiento (-), según si  $\Delta L_i$  es positivo o negativo. De esta forma, el esfuerzo axial, si es positivo, será un esfuerzo de tracción, mientras que si es negativo será un esfuerzo de compresión. Por lo tanto, es necesario, a priori, establecer un convenio de esfuerzos para cada barra, dado que afectará a cada 2 nudos que interconecten cada elemento. Nuestro convenio será el de que todas las reacciones y esfuerzos trabajen a tracción, como se dijo anteriormente, pues así resulta más fácil la resolución.

El alargamiento de cada barra se debe observar individualmente, para obtener su expresión. Para barras del primer cuadrante se puede expresar como sigue:

$$\Delta L_k = U_{L_j} - U_{L_i} = (u_j \cos \alpha + v_j \sin \alpha) - (u_i \cos \alpha + v_i \sin \alpha) \quad 12$$

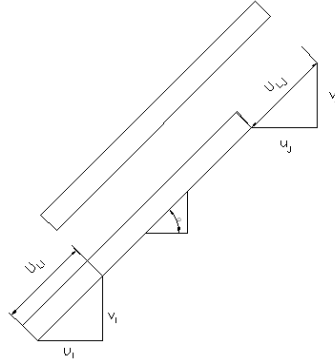


Fig. 4. Alargamiento de la barra

La ec. 8, como ya se ha dicho, no es válida para todos los cuadrantes del ángulo y se deberá tener en cuenta en cada barra.

**Barra 1:**

$$\alpha = 0^\circ \rightarrow N_1 = \frac{AE}{L_1} \Delta L_1 = \frac{AE}{L_1} [(u_2 \cos 0 + v_2 \sin 0) - (u_1 \cos 0 + v_1 \sin 0)] \rightarrow$$

$$N_1 = \frac{AE}{L_1} u_2 = 1.05 \cdot 10^5 u_2$$

**Barra 2:**

$$\alpha = 90^\circ \rightarrow N_2 = \frac{AE}{L_2} \Delta L_2 = \frac{AE}{L_2} [(u_3 \cos 90 + v_3 \sin 90) - (u_2 \cos 90 + v_2 \sin 90)] \rightarrow$$

$$N_2 = \frac{AE}{L_2} (v_3 - v_2) = 1.05 \cdot 10^5 v_3$$

**Barra 3:**

$$\alpha = 0^\circ \rightarrow N_3 = \frac{AE}{L_3} \Delta L_3 = \frac{AE}{L_3} (u_3 - u_4) \rightarrow$$

$$N_3 = 1.05 \cdot 10^5 (u_3 - u_4)$$

**Barra 4:**

$$\alpha = 90^\circ \rightarrow N_4 = \frac{AE}{L_4} \Delta L_4 = \frac{AE}{L_4} (v_4 - v_1) \rightarrow$$

$$N_4 = 1.05 \cdot 10^5 v_4$$

**Barra 5:**

$$\alpha = 45^\circ \rightarrow N_5 = \frac{AE}{L_5} \Delta L_5 = \frac{AE}{L_5} [(u_2 \cos 45 - v_2 \sin 45) - (u_4 \cos 45 - v_4 \sin 45)] \rightarrow$$

$$N_5 = \frac{1.05 \cdot 10^5}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} [(u_2) - (u_4 - v_4)] = \frac{1.05}{2} \cdot 10^5 (u_2 - u_4 + v_4)$$

**Barra 6:**

$$\alpha = 45^\circ \rightarrow N_6 = \frac{AE}{L_6} \Delta L_6 = \frac{AE}{L_6} [(u_3 \cos 45 + v_3 \sin 45) - (u_1 \cos 45 + v_1 \sin 45)] \rightarrow$$

$$N_6 = \frac{1.05 \cdot 10^5}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} (u_3 + v_3) = \frac{1.05}{2} \cdot 10^5 (u_3 + v_3)$$

$$\text{Ecs. de comportamiento: } \left\{ \begin{array}{l} N_1 = 1.05 \cdot 10^5 \cdot u_2 \\ N_2 = 1.05 \cdot 10^5 \cdot v_3 \\ N_3 = 1.05 \cdot 10^5 \cdot (u_3 - u_4) \\ N_4 = 1.05 \cdot 10^5 \cdot v_4 \\ N_5 = 1.05 \cdot 10^5 \cdot (u_2 - u_4 + v_4) \\ N_6 = 1.05 \cdot 10^5 \cdot (u_3 + v_3) \end{array} \right.$$

13

En resumen, tenemos:

- 3 ecuaciones de contorno.
- 8 ecs. de equilibrio de nudos.
- 6 ecs. de comportamiento

Es decir, tenemos 17 ecs. para resolver las 17 incógnitas. Las ecuaciones de contorno, ya no aparecen como incógnita, luego se suprimen, quedando 14 ecs.

### Método directo de la rigidez.

Ahora lo que se hace es sustituir las 6 ecs. de comportamiento en las 8 ecs. de equilibrio de nudos:

$$\text{Nudo 1} \left\{ \begin{array}{l} N_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} N_6 = X_1 \Rightarrow 1.05 \cdot 10^5 \cdot u_2 + \frac{1.05 \cdot 10^5}{2\sqrt{2}} \cdot (u_3 + v_3) = X_1 \\ N_4 + \frac{\sqrt{2}}{2} N_6 = Y_1 \Rightarrow 1.05 \cdot 10^5 \cdot v_4 + \frac{1.05 \cdot 10^5}{2\sqrt{2}} \cdot (u_3 + v_3) = Y_1 \end{array} \right.$$

$$\text{Nudo 2} \left\{ \begin{array}{l} -N_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} N_5 = 0 \Rightarrow -1.05 \cdot 10^5 \cdot u_2 - \frac{\sqrt{2}}{4} 1.05 \cdot 10^5 \cdot (u_2 - u_4 + v_4) = 0 \\ N_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} N_5 = Y_2 \Rightarrow 1.05 \cdot 10^5 \cdot v_3 + \frac{\sqrt{2}}{4} 1.05 \cdot 10^5 \cdot (u_2 - u_4 + v_4) = Y_2 \end{array} \right.$$

$$\text{Nudo 3} \begin{cases} -N_3 - \frac{\sqrt{2}}{2}N_6 = 0 \Rightarrow -1.05 \cdot 10^5 \cdot (u_3 - u_4) - \frac{\sqrt{2}}{4}1.05 \cdot 10^5 \cdot (u_3 + v_3) = 0 \\ -N_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}N_6 = 0 \Rightarrow -1.05 \cdot 10^5 \cdot v_3 - \frac{\sqrt{2}}{4}1.05 \cdot 10^5 \cdot (u_3 + v_3) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Nudo 4} \begin{cases} N_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}N_5 = -5000 \Rightarrow 1.05 \cdot 10^5 \cdot (u_3 - u_4) + \frac{\sqrt{2}}{4}1.05 \cdot 10^5 \cdot (u_2 - u_4 + v_4) = -5000 \\ -N_4 - \frac{\sqrt{2}}{2}N_5 = 0 \Rightarrow -1.05 \cdot 10^5 \cdot v_4 - \frac{\sqrt{2}}{4}1.05 \cdot 10^5 \cdot (u_2 - u_4 + v_4) = 0 \end{cases}$$

Tomamos las ecuaciones de nudo en las que no aparezcan las reacciones:

$$\text{Sistema:} \begin{cases} -1.05 \cdot 10^5 \cdot u_2 - \frac{\sqrt{2}}{4}1.05 \cdot 10^5 \cdot (u_2 - u_4 + v_4) = 0 \\ -1.05 \cdot 10^5 \cdot (u_3 - u_4) - \frac{\sqrt{2}}{4}1.05 \cdot 10^5 \cdot (u_3 + v_3) = 0 \\ -1.05 \cdot 10^5 \cdot v_3 - \frac{\sqrt{2}}{4}1.05 \cdot 10^5 \cdot (u_3 + v_3) = 0 \\ 1.05 \cdot 10^5 \cdot (u_3 - u_4) + \frac{\sqrt{2}}{4}1.05 \cdot 10^5 \cdot (u_2 - u_4 + v_4) = -5000 \\ -1.05 \cdot 10^5 \cdot v_4 - \frac{\sqrt{2}}{4}1.05 \cdot 10^5 \cdot (u_2 - u_4 + v_4) = 0 \end{cases}$$

cuya solución es:

$$[u_2 = 2.3810 \times 10^{-2}, u_3 = 9.1153 \times 10^{-2}, u_4 = 0.11496, v_3 = -2.3810 \times 10^{-2}, v_4 = 2.3810 \times 10^{-2}]$$

El sistema de ecuaciones anterior podríamos condensarlo como sigue:

$$\begin{array}{cccccc} -(1.05 \cdot 10^5 + \frac{\sqrt{2}}{4}1.05 \cdot 10^5)u_2 & +0 & +0 & +\frac{\sqrt{2}}{4}1.05 \cdot 10^5 u_4 & -\frac{\sqrt{2}}{4}1.05 \cdot 10^5 v_4 & = 0 \\ 0 & -(1.05 \cdot 10^5 + \frac{\sqrt{2}}{4}1.05 \cdot 10^5)u_3 & -\frac{\sqrt{2}}{4}1.05 \cdot 10^5 v_3 & 1.05 \cdot 10^5 u_4 & +0 & = 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{4}1.05 \cdot 10^5 u_3 & -(1.05 \cdot 10^5 + \frac{\sqrt{2}}{4}1.05 \cdot 10^5)v_3 & +0 & +0 & = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{4}1.05 \cdot 10^5 u_2 & 1.05 \cdot 10^5 u_3 & +0 & -(1.05 \cdot 10^5 + \frac{\sqrt{2}}{4}1.05 \cdot 10^5)u_4 & +\frac{\sqrt{2}}{4}1.05 \cdot 10^5 v_4 & = -5000 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4}1.05 \cdot 10^5 u_2 & +0 & +0 & +\frac{\sqrt{2}}{4}1.05 \cdot 10^5 u_4 & -(1.05 \cdot 10^5 + \frac{\sqrt{2}}{4}1.05 \cdot 10^5)v_4 & = 0 \end{array}$$

Por lo que llegaríamos a un sistema matricial, de tal forma que:

$$\begin{pmatrix} -1.05 \cdot 10^5 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4}1.05 \cdot 10^5 & -\frac{\sqrt{2}}{4}1.05 \cdot 10^5 \\ 0 & -1.05 \cdot 10^5 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) & -\frac{\sqrt{2}}{4}1.05 \cdot 10^5 & 1.05 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{4}1.05 \cdot 10^5 & -1.05 \cdot 10^5 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{4}1.05 \cdot 10^5 & 1.05 \cdot 10^5 & 0 & -1.05 \cdot 10^5 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) & \frac{\sqrt{2}}{4}1.05 \cdot 10^5 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4}1.05 \cdot 10^5 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4}1.05 \cdot 10^5 & -1.05 \cdot 10^5 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ahora bien, dado que el signo de la fuerza aplicada en el nudo es de magnitud positiva, y aparece en el vector de

cargas con signo negativo, se deben cambiar de signo a todos los elementos de la matriz, quedando:

$$\begin{pmatrix} 1.05 \cdot 10^5 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot 1.05 \cdot 10^5 & \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot 1.05 \cdot 10^5 \\ 0 & 1.05 \cdot 10^5 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) & \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot 1.05 \cdot 10^5 & -1.05 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot 1.05 \cdot 10^5 & 1.05 \cdot 10^5 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot 1.05 \cdot 10^5 & -1.05 \cdot 10^5 & 0 & 1.05 \cdot 10^5 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) & -\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot 1.05 \cdot 10^5 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot 1.05 \cdot 10^5 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot 1.05 \cdot 10^5 & 1.05 \cdot 10^5 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esto se podría haber hecho al principio, cuando se establecieron las ecuaciones de equilibrio de los nudos, pero así se ve con más claridad el motivo.

Obsérvese que el sistema matricial de ecuaciones anteriores no es más que:

$$(K)[u]=[F]$$

donde:  $\begin{cases} (K) \text{ es la matriz de rigidez de la estructura en coordenadas globales} \\ [u] \text{ es el vector de desplazamientos en coordenadas globales} \\ [F] \text{ es el vector de cargas global} \end{cases}$

Cuando resolvamos el caso por el MEF, veremos que la matriz anterior es la misma, si calculamos las expresiones numéricas:

$$(K) = \begin{pmatrix} 1.4212 \times 10^5 & 0 & 0 & -37123. & 37123. \\ 0 & 1.4212 \times 10^5 & 37123. & -1.05 \times 10^5 & 0 \\ 0 & 37123. & 1.4212 \times 10^5 & 0 & 0 \\ -37123. & -1.05 \times 10^5 & 0 & 1.4212 \times 10^5 & -37123. \\ 37123. & 0 & 0 & -37123. & 1.4212 \times 10^5 \end{pmatrix}$$

Para hallar las reacciones, podemos actuar de 2 formas:

1. Sustituir los valores hallados de los desplazamientos en las 3 ecs. no empleadas en el cálculo matricial.
2. Tomando las ecuaciones de la estática para todas las fuerzas en la estructura.

El 1<sup>er</sup> procedimiento es más farragoso en este caso. Recordemos que las ecuaciones anteriores que quedaban de equilibrio de nudos, había que cambiarles el signo, dado que la fuerza estaba calculada como negativa, siendo positiva en la fig. 1. Entonces tras efectuar el cambio de signo a todos los elementos, calculamos las reacciones:

$$\begin{aligned} -1.05 \cdot 10^5 \cdot u_2 - \frac{1.05 \cdot 10^5}{2\sqrt{2}} \cdot (u_3 + v_3) &= X_1 \Rightarrow -1.05 \cdot 10^5 \cdot 2.3810 \times 10^{-2} - \frac{1.05 \cdot 10^5}{2\sqrt{2}} \cdot (9.1153 \times 10^{-2} - 2.3810 \times 10^{-2}) = -5000 = X_1 \\ -1.05 \cdot 10^5 \cdot v_4 - \frac{1.05 \cdot 10^5}{2\sqrt{2}} \cdot (u_3 + v_3) &= Y_1 \Rightarrow -1.05 \cdot 10^5 \cdot 2.3810 \times 10^{-2} - \frac{1.05 \cdot 10^5}{2\sqrt{2}} \cdot (9.1153 \times 10^{-2} - 2.3810 \times 10^{-2}) = -5000.0 = Y_1 \\ -1.05 \cdot 10^5 \cdot v_3 - \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot 1.05 \cdot 10^5 \cdot (u_2 - u_4 + v_4) &= Y_2 \Rightarrow -1.05 \cdot 10^5 \cdot (-2.3811 \times 10^{-2}) - \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot 1.05 \cdot 10^5 \cdot (2.3810 \times 10^{-2} - 0.11496 + 2.3810 \times 10^{-2}) = 5000.0 = Y_2 \end{aligned}$$

No obstante, ésta es la forma más enrevesada. Existe una forma más fácil de obtener las reacciones en este caso.

Mediante el 2º método, podemos hacer lo siguiente, fijándonos en las fuerzas tal y como están en la fig. 1, es decir, con el sentido positivo de cada eje:

$$3 \text{ ecs. de la estática con momentos en } (0,0) \left\{ \begin{array}{l} \sum M_{(0,0)} = 0 \Rightarrow -FL + Y_2L = 0 \Rightarrow Y_2 = F = 5000 \\ \sum V = 0 \Rightarrow Y_1 + Y_2 = 0 \Rightarrow Y_1 = -Y_2 = -5000 \\ \sum H = 0 \Rightarrow F + X_1 = 0 \Rightarrow X_1 = -F = -5000 \end{array} \right.$$

## 2) Métodos clásicos de resolución (teorema de Castigliano con programa Anesclas).

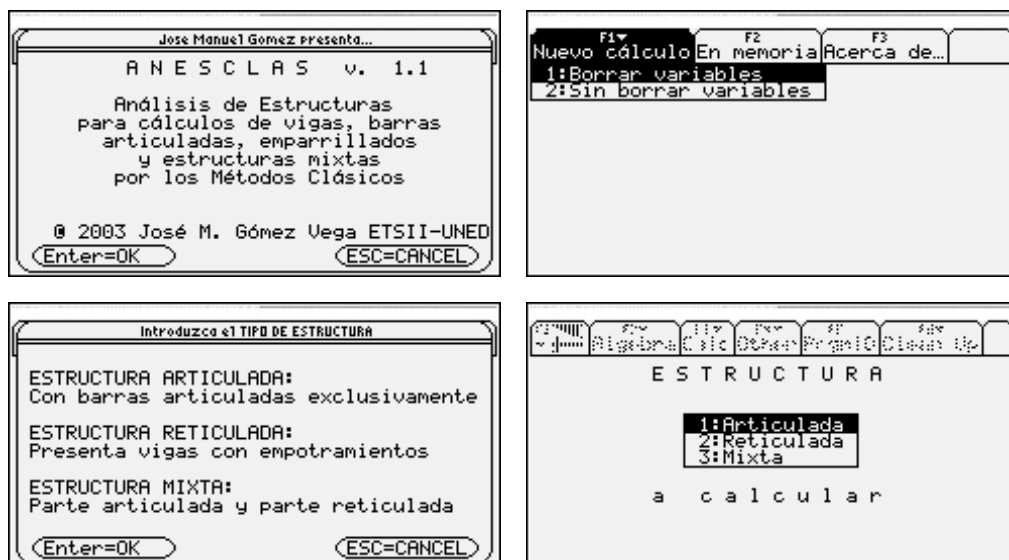
Mediante el programa Anesclas podremos calcular los esfuerzos en todas las barras y el corrimiento (deslizamiento o desplazamiento horizontal o vertical) de un nudo, según el Teorema de Castigliano y el uso de estados auxiliares, uno por cada corrimiento. Podríamos aplicar sucesivamente Castigliano para hallar todos los desplazamientos, poniendo cargas auxiliares a nodos; no obstante, mediante este procedimiento sería tedioso, pues sería necesario introducir nuevos estados, uno por cada carga auxiliar y calcular el equilibrio de nodos de cada estado. Es por ello que solo calcularemos un corrimiento para observar el proceso de cálculo con el programa.

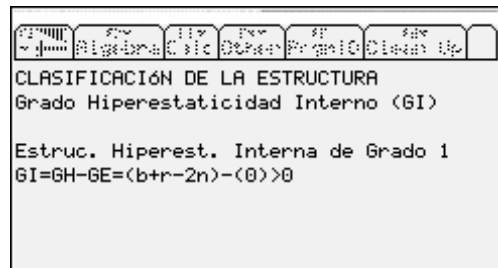
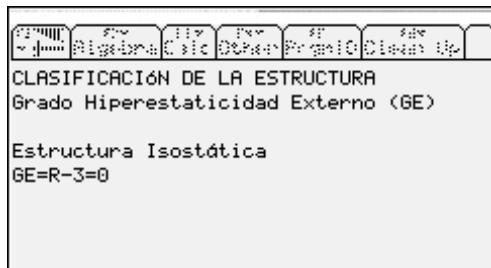
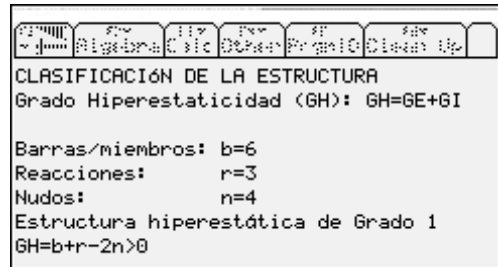
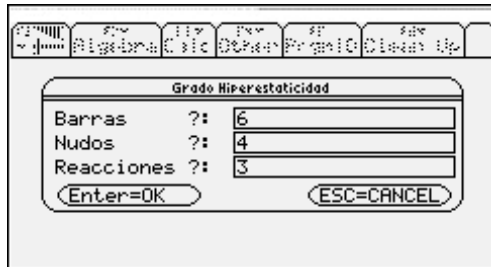
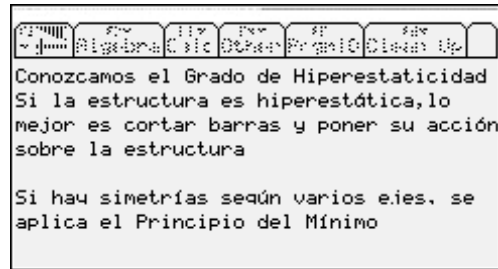
Dado que la estructura es hiperestática de grado 1, podemos realizar 2 acciones:

1. cortar una barra y poner su acción (esfuerzos) sobre la estructura.
2. sustituir una ligadura (coacción) por una carga auxiliar equivalente.

Comprobemos como Anesclas es capaz de hallar todos los esfuerzos y establecer las ecuaciones necesarias en un procedimiento *paso a paso* secuencial.

### Inicio del programa:





**Forma de conseguir estructura isostática:**

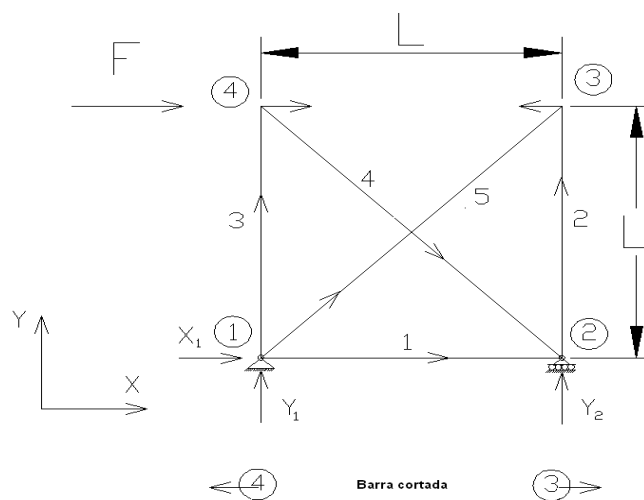
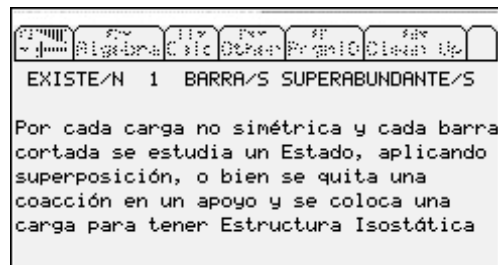
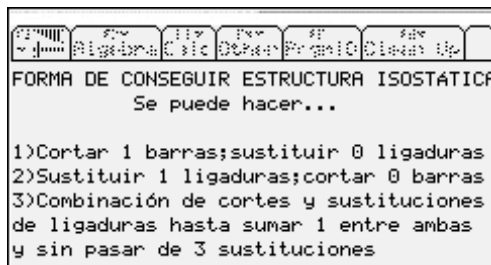
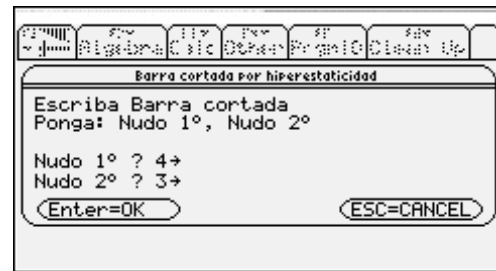
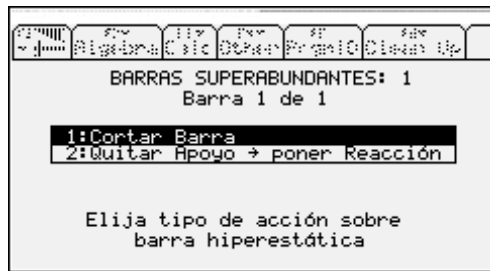
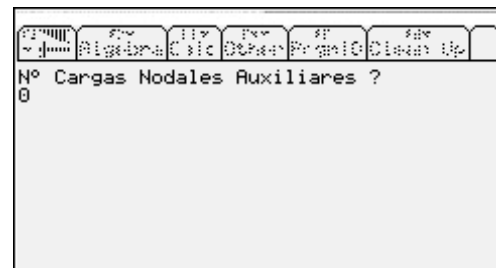
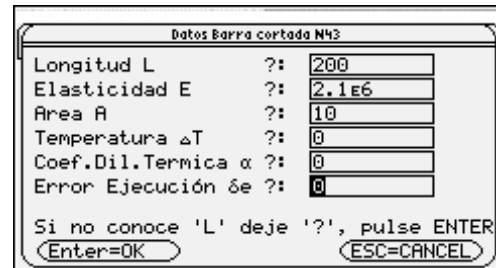
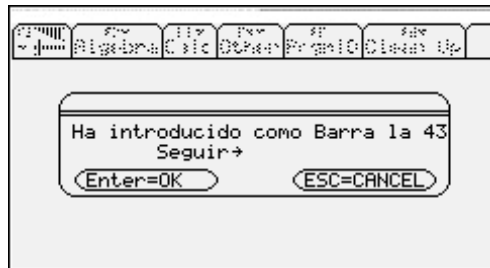


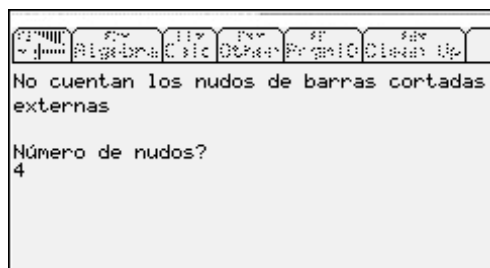
Fig. 5. Barra cortada y estructura isostática

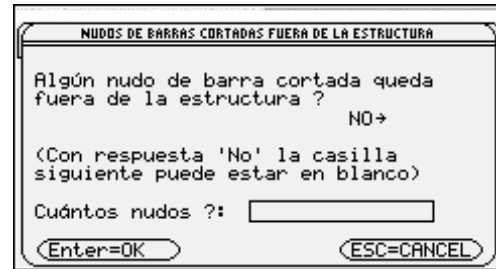


Datos de la barra  $N_{43}$  (es la barra 3 con los nodos en orden: 4 inicial  $\rightarrow$  3 final. No hay cargas auxiliares, pues de ponerlas, crearíamos más estados para calcular más corrimientos horizontales o verticales. Lo que conseguiríamos sería calcular otros desplazamientos en nudos.

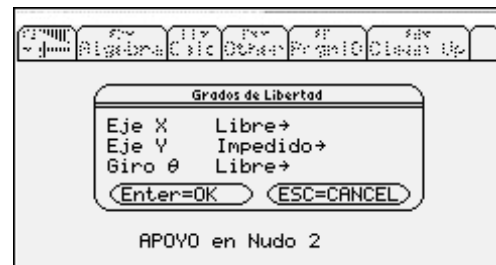
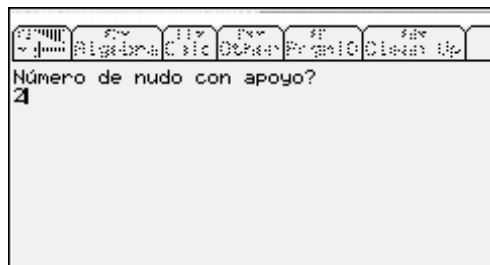
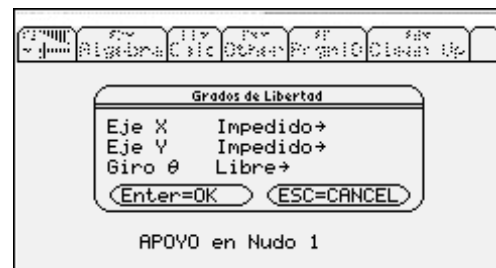
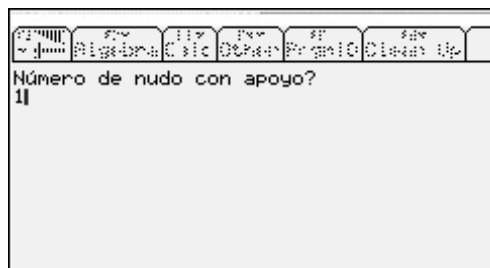
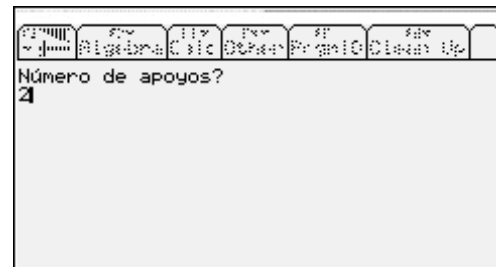
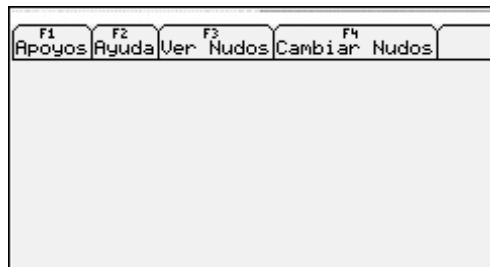


## Nudos.



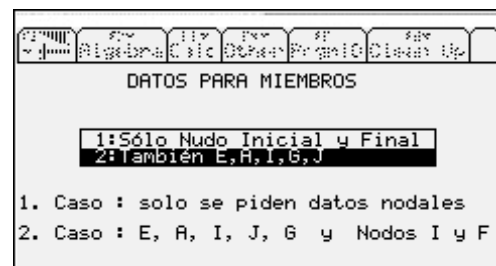


## Apoyos.



## Elementos-miembros.

Ahora nos debemos de fijar en la nueva nomenclatura de elementos de la fig. 5, recordando que esta estructura ya no tiene 6 elementos, sino 5 y que es isostática, con las acciones de la barra cortada en la estructura.



Algebra Calc Oper PrntIO Clean Up

Número de Miembros?  
5

Algebra Calc Oper PrntIO Clean Up

----- MIEMBRO Nº 1 -----

Nudo inicial ? : 1

Nudo final ? : 2

Enter=OK ESC=CANCEL

Miembro 1

Mód. elasticidad E ? : 2.1E6

Tipo Area ? Constante→

Inercia I ? :

Mód. elasticidad G ? :

Inercia J (radial) ? :

Enter=OK ESC=CANCEL

MIEMBRO Nº 1

SECCIÓN CONSTANTE MIEMBRO Nº 1

Area miembro ? : 10

Enter=OK ESC=CANCEL

Algebra Calc Oper PrntIO Clean Up

----- MIEMBRO Nº 2 -----

Nudo inicial ? : 2

Nudo final ? : 3

Enter=OK ESC=CANCEL

Algebra Calc Oper PrntIO Clean Up

----- MIEMBRO Nº 3 -----

Nudo inicial ? : 1

Nudo final ? : 4

Enter=OK ESC=CANCEL

Algebra Calc Oper PrntIO Clean Up

----- MIEMBRO Nº 4 -----

Nudo inicial ? : 4

Nudo final ? : 2

Enter=OK ESC=CANCEL

Algebra Calc Oper PrntIO Clean Up

----- MIEMBRO Nº 5 -----

Nudo inicial ? : 1

Nudo final ? : 3

Enter=OK ESC=CANCEL

## Cargas.

Algebra Calc Oper PrntIO Clean Up

PROCESO CALCULO DATOS

- ✓Asigna Longitudes y Ángulos Miembros
- ✓Establece Listas para E,A,L
- ✓Crea Axiles para Miembros
- ▶Genera Grados de Libertad

F1 Cargas F2 Ver... F3 Cambiar...

Cargas en Nudos

Número de nudo ? : 4

Tipo carga >>>> Eje X+

Valor de la carga ? : 5000

CONVENIO: Eje X (+) si →

: Eje Y (+) si ↑

: Momento (+) si antihorario

Enter=OK ESC=CANCEL

Algebra Calc Oper PrntIO Clean Up

CARGAS EN MIEMBROS

No incluir aquí cargas especiales como:  
desajustes miembro, cargas térmicas,  
apoyos elásticos, asentamiento apoyos...  
Se introduce en condiciones especiales  
después.

CARGAS EN MIEMBROS

Nº Miembros cargados?  
:

Si algún miembro tiene carga múltiple,  
indique el nº mayor de cargas de este  
tipo que hay en dicho miembro  
Si no, deje vacía esta casilla

Nº cargas múltiples ?  
:

Enter=OK      ESC=CANCEL

F1      F2      F3      F4

Especiales Ver... Cálculos Cambiar...

F1

Condiciones especiales

Si introduce datos en formato simbólico  
escriba la variable y el miembro en la  
propia variable

Ejemplo: desajuste longitud miembro 1  
Ponga: δ1

F1      F2      F3      F4      F5

Cambiar Ver datos Analizar Gráfica Quitar

1: ¡Calcular Val!  
2: Resultados de Cálculos

### Cálculos en estado 1. Reacciones.

Algebra Calc Oper PrntG Clean Up

Expresión del Axil para cualquier barra:  
 $n_i = n_{1i} + n_{2i} \cdot n_{43}$

donde se ha considerado en el estado 1  
la carga, la propia (no la unitaria)

Algebra Calc Oper PrntG Clean Up

CALCULO AXILES EN ESTADO 1  
para las cargas de la Estructura

1: Hallar Reacciones  
2: Método de Secciones de Ritter  
3: Método de los Nudos

Si el máximo de esfuerzos desconocidos  
en cualquier nudo es mayor que 2, halle  
1º las Reacciones, o bien aplique el  
Método de las Secciones de Ritter

Reacciones en la Estructura

Cálculo de las Reacciones de la  
Estructura

para el Estado 1

Si las Reacciones son más de 3, elija  
las variables a resolver al final

Enter=OK      ESC=CANCEL

Coordenadas para aplicar Momentos

Introduzca las referencias (x,y) para  
aplicar los momentos

Coordenada X:

Coordenada Y:

Enter=OK      ESC=CANCEL

Algebra Calc Oper PrntG Clean Up

ECUACIONES: (Pulse ENTER para que salgan)

$\Sigma H = 0$   
 $r_{h1} + 5000 = 0$   
 $\Sigma V = 0$   
 $r_{v1} + r_{v2} = 0$   
 $\Sigma M = 0$   
 $200 \cdot r_{v2} - 1000000 = 0$

Algebra Calc Oper PrntG Clean Up

$r_{h1} = -5000$  and  $r_{v1} = -5000$  and  $r_{v2} = 5000$

### Cálculos en estado 1. Método de equilibrios de nudos.

Obsérvese que comenzamos por el nodo 1. Si lo hiciéramos a mano, lo ideal sería comenzar por el nodo 4, dado que así aparecerían las ecs. despejadas desde el primer momento. No obstante, se ha hecho así para ver que el programa puede arrastrar ecuaciones no despejadas. Existen 2 modos de cálculo por el método de equilibrios de nudo: automático y manual. En modo automático es posible que, a veces, calcule esfuerzos con variables en exceso. En este caso al calcular el nodo 2, se ha puesto en manual para despejar las ecuaciones apropiadamente. Obsérvese que en el pantallazo de la figura de dicho nodo existe un esfuerzo no despejado, es decir, habría 3 variables para 2 ecs. En este caso, si empezamos por un nodo en el que vamos arrastrando axiles no despejados nos puede suceder eso. No obstante, siempre podemos anular el cálculo de un nodo dentro de un estado (repetir nodo) y volver a empezar.

Algebra Calc Other PrntIO Clean Up

1: Grabar Reacciones  
2: Borrar y Empezar otra vez  
3: No Grabar y Salir

Algebra Calc Other PrntIO Clean Up

CALCULO AXILES EN ESTADO 1  
para las cargas de la Estructura

1: Hallar Reacciones  
2: Método de Secciones de Ritter  
3: Método de los Nudos

Si el máximo de esfuerzos desconocidos en cualquier nudo es mayor que 2, halle 1º las Reacciones, o bien aplique el Método de las Secciones de Ritter

METODO DE LOS NUDOS

Análisis nodal para cálculo de esfuerzos axiales desconocidos por el Método de los Nudos en estructuras articuladas

ESTADO : 1

Enter=OK ESC=CANCEL

Algebra Calc Other PrntIO Clean Up

El Nº Total de Nudos es 4

Puede que algún nudo pertenezca a una barra cortada que no está incluida en la estructura cortada, por lo que dicho Nº será menor

Algebra Calc Other PrntIO Clean Up

1: Cambiar Nº Nodos  
2: Nº Nodos Correcto

NUDO A CALCULAR 1 DE 4

ESTADO : 1

NUDOS CALCULADOS: 0

Nº de Nudo ? : 1

Modo variables : >>> Automático

Enter=OK ESC=CANCEL

F1 Zoom F2 Trace F3 Regraph F4 Math F5 Draw F6 F7

NUDO 1

Todas las Fuerzas son salientes

Algebra Calc Other PrntIO Clean Up

$$\frac{n13 \cdot \sqrt{2}}{2} + n14 - 5000 = 0$$

Ecuación 2 →  $\Sigma(FH)=0$

$$n12 + \frac{n13 \cdot \sqrt{2}}{2} - 5000 = 0$$

1a. Solución: NUDO 1

$$\left\{ n12 = \frac{-(n13 \cdot \sqrt{2} - 10000)}{2} \text{ and } n14 = \frac{-(n13 \cdot \sqrt{2}}{2} \right.$$

Algebra Calc Other PrntIO Clean Up

$$\frac{n13 \cdot \sqrt{2}}{2} + n14 - 5000 = 0$$

Ecuación 2 →  $\Sigma(FH)=0$

$$n12 + \frac{n13 \cdot \sqrt{2}}{2} - 5000 = 0$$

1a. Solución: NUDO 1

$$\left\{ \frac{3 \cdot \sqrt{2} - 10000}{2} \text{ and } n14 = \frac{-(n13 \cdot \sqrt{2} - 10000)}{2} \right\}$$

NUDO A CALCULAR 2 DE 4

ESTADO : 1

NUDOS CALCULADOS: (1)

Nº de Nudo ? : 2

Modo variables : >>> Manual

Enter=OK ESC=CANCEL

F1 Zoom F2 Trace F3 Regraph F4 Math F5 Draw F6 F7

NUDO 2

Todas las Fuerzas son salientes

Variables a considerar para resolver

Introduzca las variables de Axiles o Reacciones entre comas  
Si es una sola, no ponga comas

Ejemplos: (n14,Rv3) ó (N25)

Variables ? : (n23 ,n42 )

Enter=OK ESC=CANCEL

Algebra Calc Other PrntIO Clean Up

Ecuación 1 → Σ(FV)=0  
 $n_{23} + \frac{n_{42} \cdot \sqrt{2}}{2} + 5000 = 0$

Ecuación 2 → Σ(FH)=0  
 $\frac{n_{13} \cdot \sqrt{2}}{2} - \frac{n_{42} \cdot \sqrt{2}}{2} - 5000 = 0$

2a. Solución: NUDO 2  
 $\left\{ n_{23} = \frac{-n_{13} \cdot \sqrt{2}}{2} \text{ and } n_{42} = n_{13} - 5000 \cdot \sqrt{2} \right\}$

NUDO A CALCULAR 3 DE 4

ESTADO : 1

NUDOS CALCULADOS: (1,2)

Nº de Nudo ? :

Modo variables : >>>> Automático→

Enter=OK ESC=CANCEL

F1 Zoom F2 Trace F3 ReGraph F4 Math F5 Draw F6 F7 F8

NUDO 3

Todas las Fuerzas son salientes

Algebra Calc Other PrntIO Clean Up

Ecuación 1 → Σ(FV)=0  
 $0 = 0$

Ecuación 2 → Σ(FH)=0  
 $\frac{-n_{13} \cdot \sqrt{2}}{2} = 0$

3a. Solución: NUDO 3  
 $(n_{13} = 0)$

NUDO A CALCULAR 4 DE 4

ESTADO : 1

NUDOS CALCULADOS: (1,2,3)

Nº de Nudo ? :

Modo variables : >>>> Automático→

Enter=OK ESC=CANCEL

F1 Zoom F2 Trace F3 ReGraph F4 Math F5 Draw F6 F7 F8

NUDO 4

Todas las Fuerzas son salientes

Algebra Calc Other PrntIO Clean Up

Ecuación 1 → Σ(FV)=0  
 $0 = 0$

Ecuación 2 → Σ(FH)=0  
 $0 = 0$

4a. Solución: NUDO 4  
 Las identidades se cumplen: 0=0

### Estado 1. Resultados globales.

Algebra Calc Other PrntIO Clean Up

- 1: Siguiente Nudo
- 2: Ver Resultado Aproximado
- 3: Ver Resultado Exacto
- 4: Siguiente Estado
- 5: Repetir Nudo
- 6: Ver Nº Nudos y Soluciones
- 7: Resultados Globales
- 8: Borrar Nudos → Empezar de Nuevo
- 9: Calcular Reacciones Aparte
- A: Ir a Método de Ritter
- B: Ver Cargas del Estado

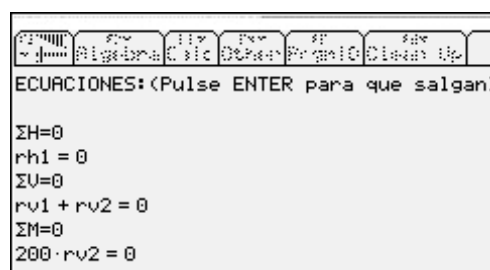
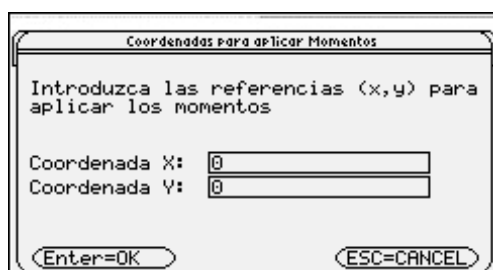
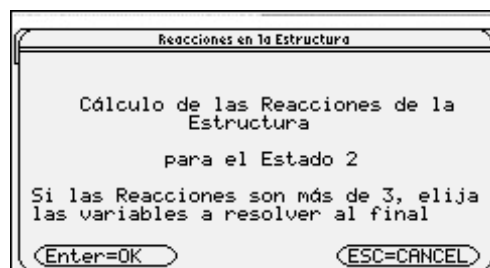
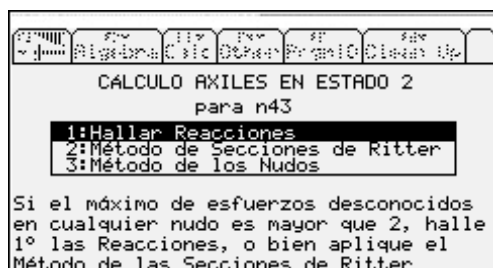
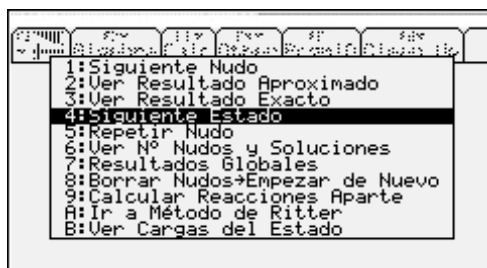
Algebra Calc Other PrntIO Clean Up

SOLUCIONES GLOBALES

REACCIONES: (si hay más de 3, ver Axiles)  
 $rh1 = -5000 \text{ and } rv1 = -5000 \text{ and } rv2 = 5000$

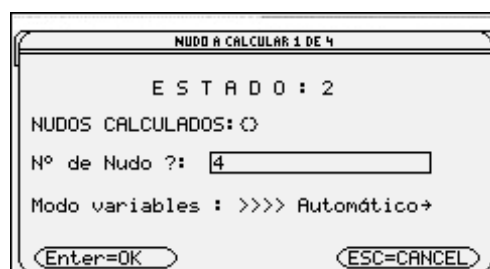
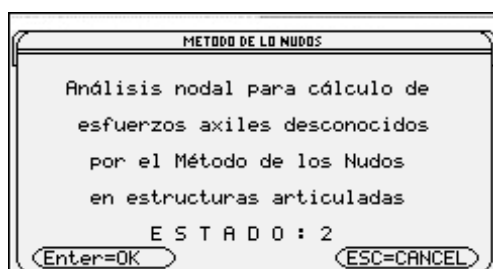
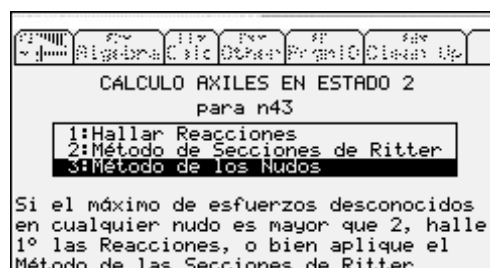
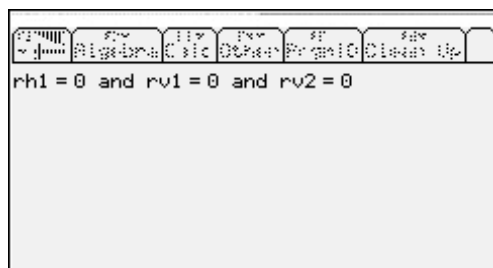
AXILES: (use flechas ↔ para ver)  
 $n12 = 5000 \text{ and } n13 = 0 \text{ and } n14 = 5000 \text{ and } \blacktriangleright$

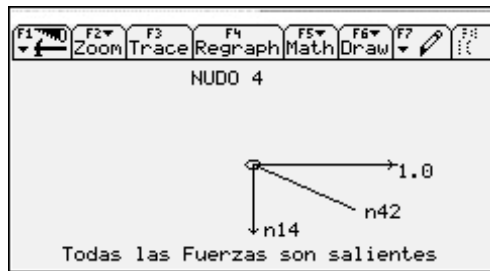
## Estado 2. Cálculo de reacciones.



## Estado 2. Cálculo de axiles por el método de los nudos.

En esta ocasión sí empezamos por el nodo 4 y establecemos en el cálculo de todos los nodos el modo automático.





Algebra Calc Display Format Clean Up

Ecuación 1  $\rightarrow \Sigma(FV)=0$   
 $-n14 - \frac{n42 \cdot \sqrt{2}}{2} = 0$   
 Ecuación 2  $\rightarrow \Sigma(FH)=0$   
 $\frac{n42 \cdot \sqrt{2}}{2} + 1 = 0$   
 1a. Solución: NUDO 4  
 (n14 = 1 and n42 =  $-\sqrt{2}$ )

NUDO A CALCULAR 2 DE 4

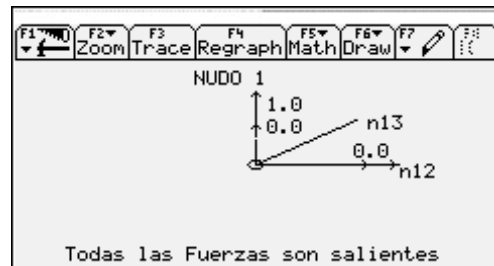
ESTADO : 2

NUDOS CALCULADOS: (4)

Nº de Nudo ? :

Modo variables : >>>> Automático→

Enter=OK ESC=CANCEL



Algebra Calc Display Format Clean Up

Ecuación 1  $\rightarrow \Sigma(FV)=0$   
 $\frac{n13 \cdot \sqrt{2}}{2} + 1 = 0$   
 Ecuación 2  $\rightarrow \Sigma(FH)=0$   
 $n12 + \frac{n13 \cdot \sqrt{2}}{2} = 0$   
 2a. Solución: NUDO 1  
 (n12 = 1 and n13 =  $-\sqrt{2}$ )

NUDO A CALCULAR 3 DE 4

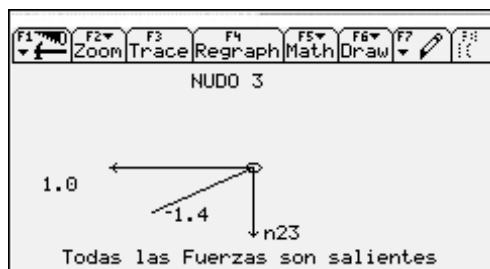
ESTADO : 2

NUDOS CALCULADOS: (4,1)

Nº de Nudo ? :

Modo variables : >>>> Automático→

Enter=OK ESC=CANCEL



Algebra Calc Display Format Clean Up

Ecuación 1  $\rightarrow \Sigma(FV)=0$   
 $1 - n23 = 0$   
 Ecuación 2  $\rightarrow \Sigma(FH)=0$   
 $0 = 0$   
 3a. Solución: NUDO 3  
 (n23 = 1)

NUDO A CALCULAR 4 DE 4

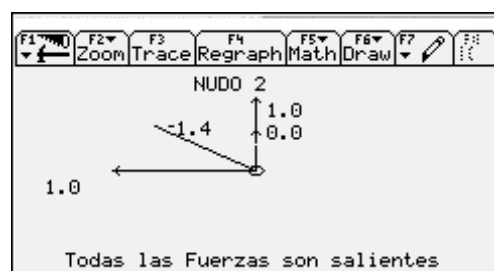
ESTADO : 2

NUDOS CALCULADOS: (4,1,3)

Nº de Nudo ? :

Modo variables : >>>> Automático→

Enter=OK ESC=CANCEL



- Algebra Calc Display Format Clean Up
- 1: Siguiente Nudo
  - 2: Ver Resultado Aproximado
  - 3: Ver Resultado Exacto
  - 4: Siguiente Estado
  - 5: Repetir Nudo
  - 6: Ver Nº Nudos y Soluciones
  - 7: Resultados Globales**
  - 8: Borrar Nudos→Empezar de Nuevo
  - 9: Calcular Reacciones Aparte
  - A: Ir a Método de Ritter
  - B: Ver Cargas del Estado

Algebra Calc Display Format Clean Up

SOLUCIONES GLOBALES

REACCIONES: (si hay más de 3, ver Axiles)  
 rh1 = 0 and rv1 = 0 and rv2 = 0

AXILES: (use flechas ↔ para ver)  
 n12 = 1 and n13 =  $-\sqrt{2}$  and n14 = 1 and n23 = 1

## Fin de cálculo de estados.

Una vez calculados los dos estados, pasamos a calcular el resto de la estructura. Para ello, pulsamos en la pantalla emergente:

4:Siguiete Estado, apareciendo todos los axiles de los dos estados.

"Axiles"	n12	n23	n14	n42	n13
"Estado"					
1	5000	0	5000	$-5000 \cdot \sqrt{2}$	0
2	1	1	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$

## Corrimientos relativos.

El programa sabe cuál es el corrimiento que debe calcular en función de los datos introducidos (barra cortada) y sabe a qué estado hace referencia. En este caso el corrimiento es entre los nudos 4 y 3 (barra con axil  $N_{43}$  como ya sabemos) y respecto al Estado 2.

**CORRIMIENTOS RELATIVOS**  
Se calculan los corrimientos relativos necesarios para hallar axiles en barras cortadas por hiperestaticidad que son: (n43)

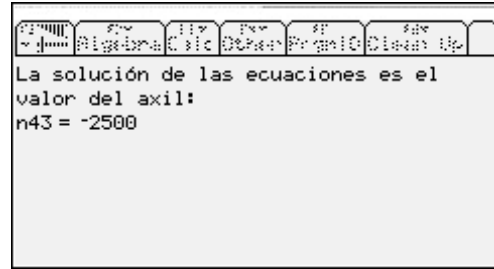
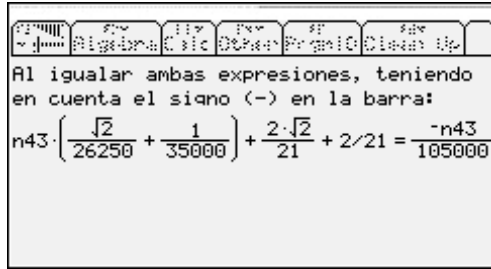
El corrimiento relativo entre 4 y 3 corresponde al Estado Auxiliar de Castigliano 2

**ECUACIONES SIMBÓLICAS CORRIMIENTOS**  
Para la estructura, según Castigliano, con el axil en cada barra:  
 $n_i = n_{1i} + n_{2i} \cdot n_{43}$ ,  
el corrimiento relativo  $\Gamma_{43} (\rightarrow \leftarrow)$  es:  
$$\sum_{i=1}^m \left( n_i \cdot n_{2i} \cdot \frac{l_i}{a_i \cdot e_i} \right) + \sum_{i=1}^m (n_{2i} \cdot l_i \cdot \alpha_i \cdot \Delta t_i) \rightarrow$$

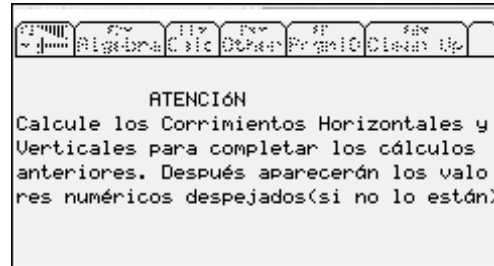
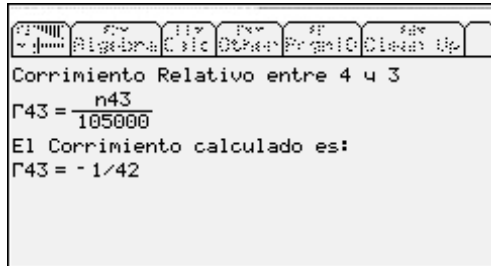
**ECUACIONES SIMBÓLICAS CORRIMIENTOS**  
Para la estructura, según Castigliano, con el axil en cada barra:  
 $n_i = n_{1i} + n_{2i} \cdot n_{43}$ ,  
el corrimiento relativo  $\Gamma_{43} (\rightarrow \leftarrow)$  es:  
$$\left( \frac{l_i}{a_i \cdot e_i} \right) + \sum_{i=1}^m (n_{2i} \cdot l_i \cdot \alpha_i \cdot \Delta t_i) + \sum_{i=1}^m (n_{2i} \cdot \delta e_i)$$

Para la barra cortada, por Castigliano se tiene  $\leftarrow (\rightarrow) :$   
$$\Gamma_{43} = N_{43} \cdot \frac{1}{a \cdot e} + 1 \cdot \alpha \cdot \Delta t + \delta e$$
  
Se observa que el Corrimiento para la Barra y para la Estructura tienen signos opuestos

**ECUACIONES CALCULADAS DE CORRIMIENTOS**  
Por la ecuación de la estructura:  
$$\Gamma_{43} = n_{43} \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{26250} + \frac{1}{35000} \right) + \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{21} + 2/21$$
  
y por la ecuación de la barra:  
$$\Gamma_{43} = \frac{n_{43}}{105000}$$

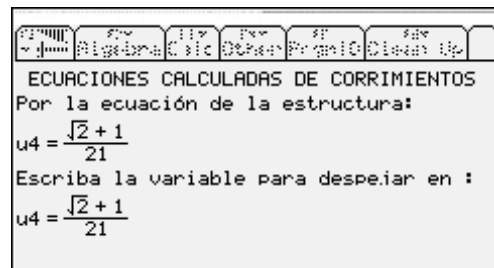
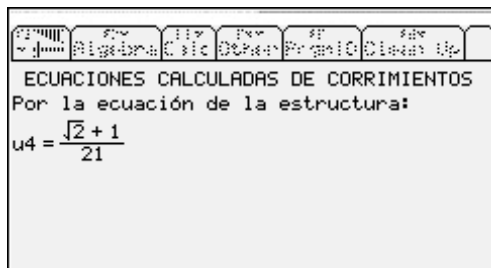
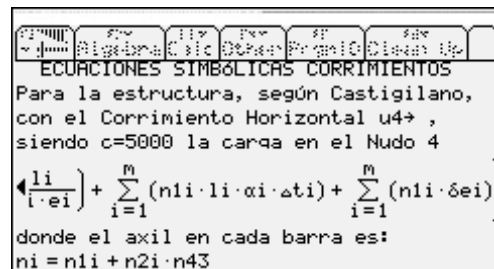
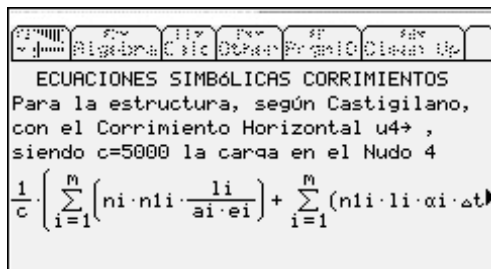
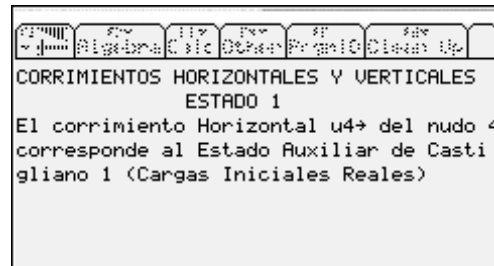
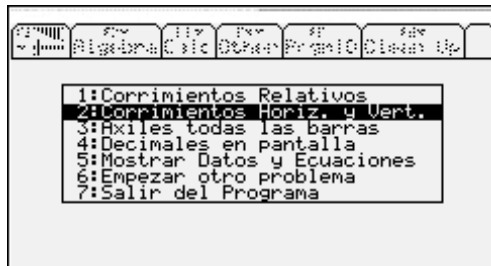


En este caso, el corrimiento ya sale calculado. La pantalla de advertencia aparece por si acaso no estuviese totalmente despejada la ecuación.

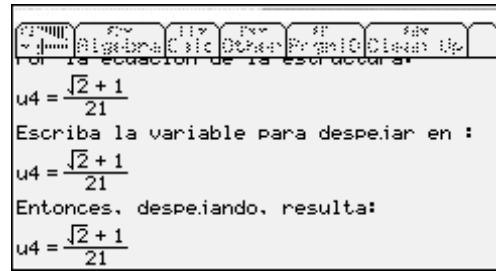
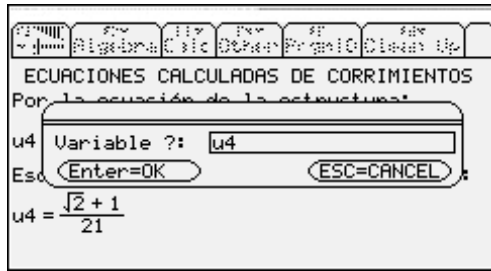


### Corrimientos horizontales y verticales.

Igualmente el programa calcula los corrimientos. En este caso el corrimiento es  $u_4$  ya que la carga horizontal está aplicada en esa dirección y en ese nudo. Para obtener, por ejemplo, el corrimiento vertical en el nudo 3, habríamos de haber creado una carga auxiliar en el menú correspondiente al principio de la entrada de datos, en dirección vertical en dicho nodo.

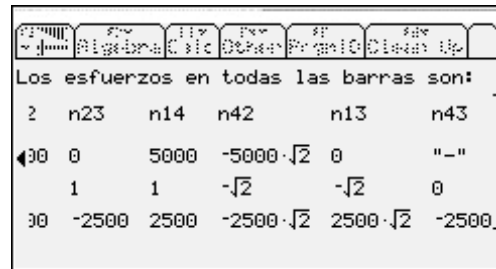
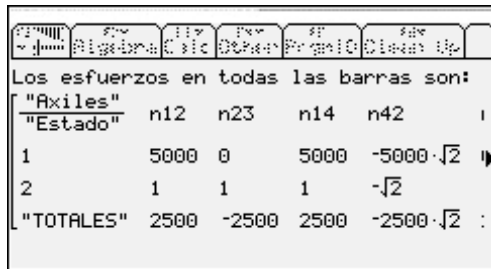
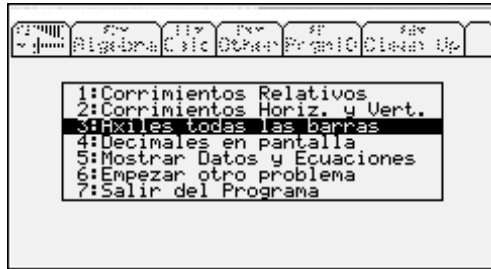


En algunos casos podría ser que la expresión no hubiese sido totalmente despejada. Es por ello que el programa pregunta, por si acaso, en qué variable quiere despejarse la ecuación mostrada. Evidentemente, en este caso, no es necesario.

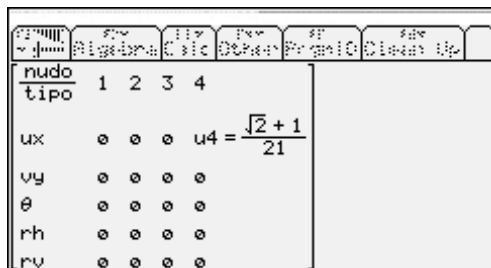
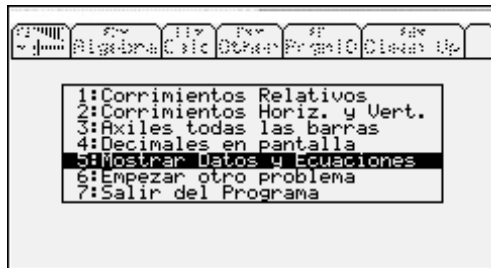


### Axiles en todas las barras.

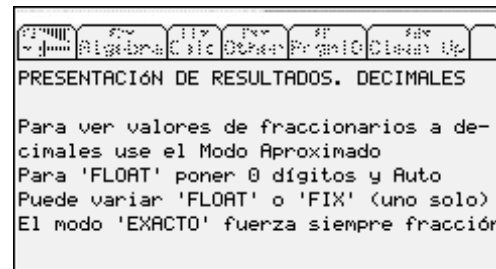
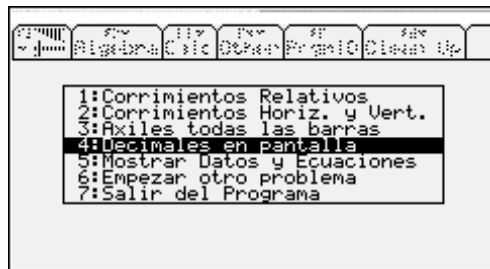
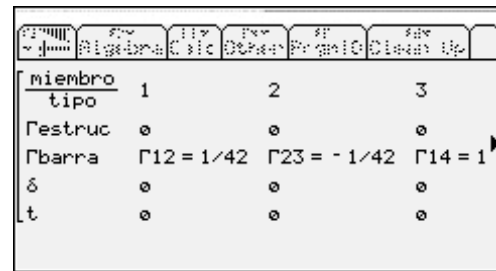
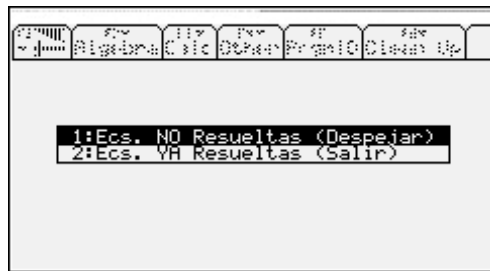
El programa calcula los axiles por cada estado y el total.



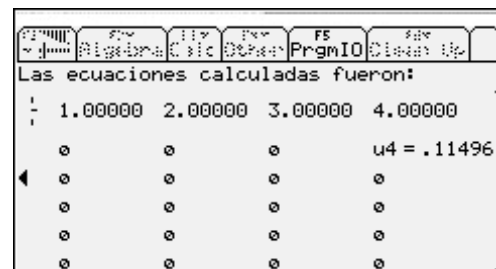
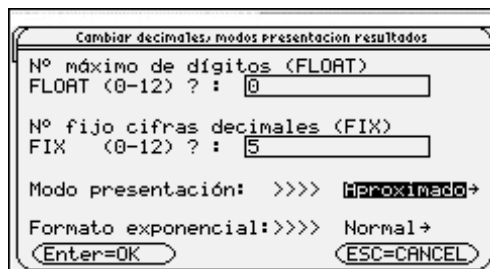
Podemos acceder a todas las ecuaciones calculadas. Los corrimientos relativos en todos los nudos sí pueden ser calculados por Anesclas, porque como se observa, están en función de los axiles.



La 1ª vez que accedemos a este menú (5:Mostrar Datos y Ecuaciones), aparecen las ecuaciones no totalmente resueltas. En este caso, el desplazamiento horizontal del nodo 4, si está ya resuelto, pero no los corrimientos. Una vez pulsado el 2º menú que aparece, si podemos ver las ecuaciones resueltas.



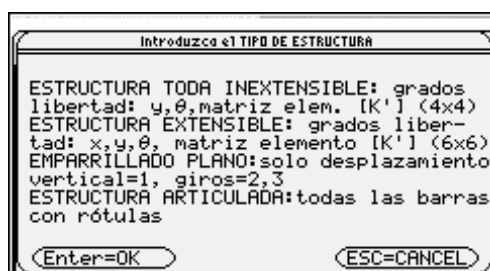
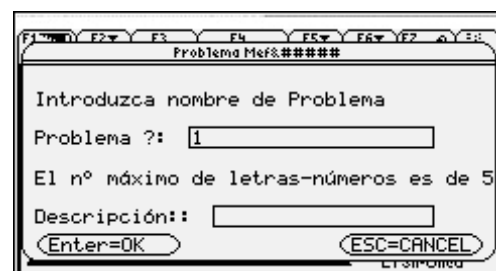
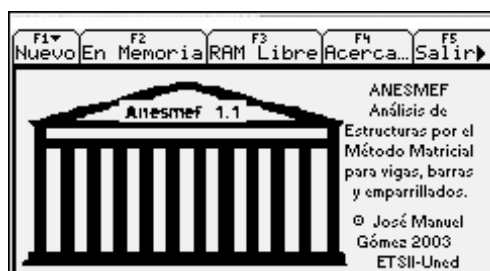
Finalmente comprobamos que el desplazamiento  $u_4$  es correcto con la presentación de 5 dígitos decimales.

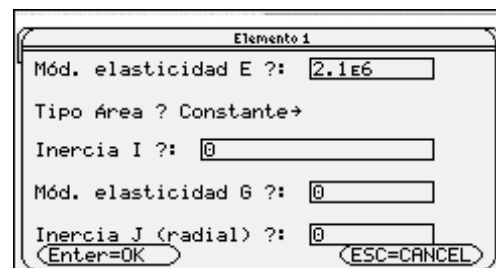
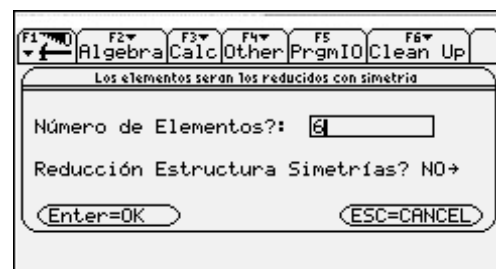
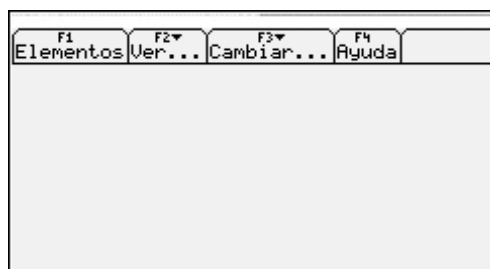
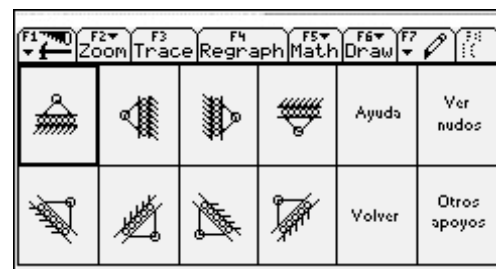
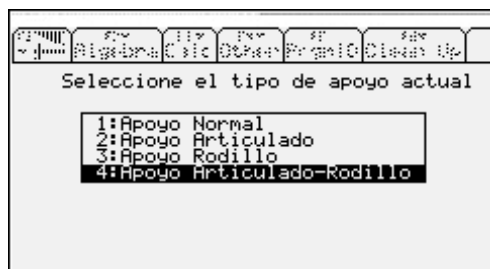
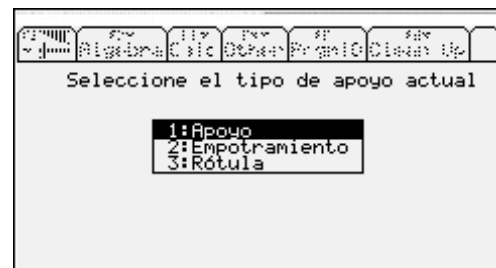
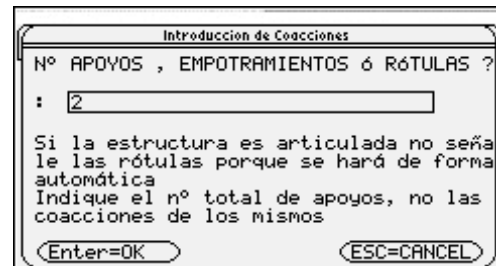
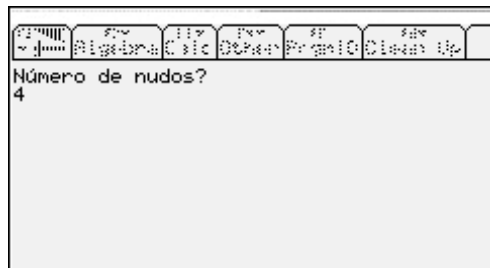


### 3) Métodos matriciales por MEF (método elementos finitos con programa Anesmef).

Anesmef es un programa para cálculo de estructuras en 2D creado por el autor de este artículo. Vamos a realizar el problema con este programa. Se resolverá la celosía adjuntando secuencialmente *pantallazos* del programa.

#### Introducción de datos:





ELEMENTO Nº 1

SECCIÓN CONSTANTE ELEMENTO Nº 1

Área Elemento ? :

Enter=OK      ESC=CANCEL

F1 Cargas    F2 Ver...    F3 Cambiar...

Algebra Calc Other PrgnIO Clean Up

CARGAS EN NUDOS

Número de Nudos cargados?  
1

Cargas en Nudos

Número de nudo ? :

Carga Eje X? :

Carga Eje Y? :

Carga Momento?:

CONVENIO: Eje X (+) si →  
              : Eje Y (+) si ↑  
              : Momento (+) si antihorario

Enter=OK      ESC=CANCEL

Algebra Calc Other PrgnIO Clean Up

CARGAS EN ELEMENTOS

No incluir aquí cargas especiales como:  
desajustes elemento, cargas térmicas,  
apoyos elásticos, asentamiento apoyos...  
Se introduce en condiciones especiales  
después.

CARGAS EN ELEMENTOS

Nº Elementos Cargados?  
:

Si algún elemento tiene carga múltiple,  
indique el nº mayor de cargas de este  
tipo que hay en dicho elemento  
Si no, deje vacía esta casilla

Nº Cargas Múltiples ?  
:

Enter=OK      ESC=CANCEL

F1 Especiales    F2 Ver...    F3 Cálculos    F4 Cambiar...

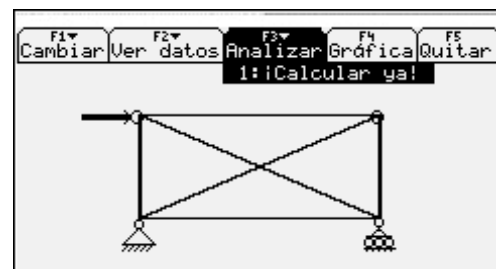
Condiciones especiales

1:Asentamiento apoyos  
2:Apoyos elásticos  
3:Apoyos inclinados  
4:Cargas térmicas  
5:Desajuste longitud elemento  
6:No hay condiciones especiales  
7:Eliminar condiciones especiales

Proceso de cálculo.

Algebra Calc Other PrgnIO Clean Up

Iniciando M.E.F para  
calcular la estructura...



Algebra Calc Other PrgnIO Clean Up

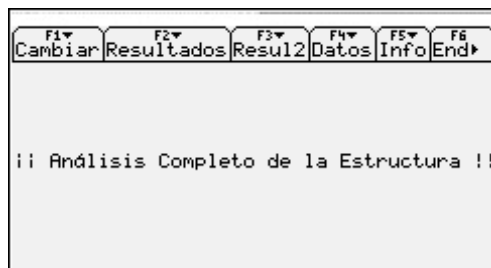
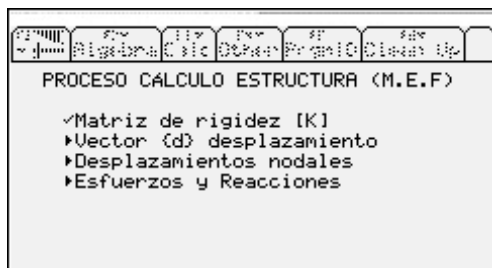
PROCESO CALCULO ESTRUCTURA (M.E.F)

- ▶Asignando vectores de cargas (Pi)
- ▶Creando dimensión matriz [K]

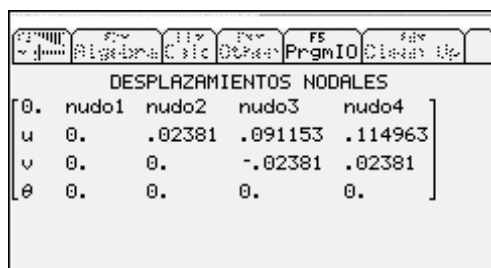
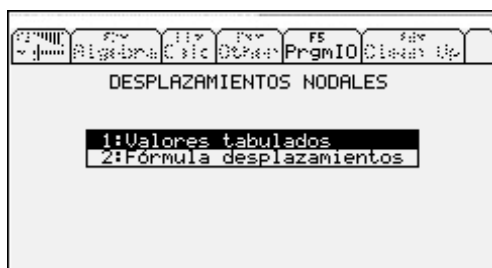
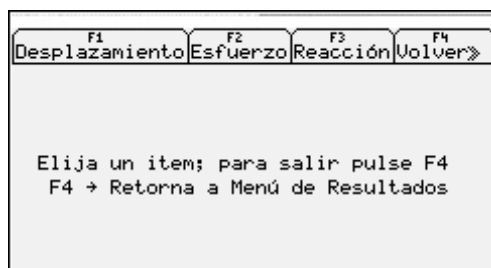
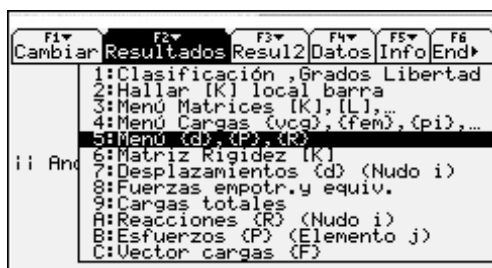
Algebra Calc Other PrgnIO Clean Up

PROCESO CALCULO ESTRUCTURA (M.E.F)

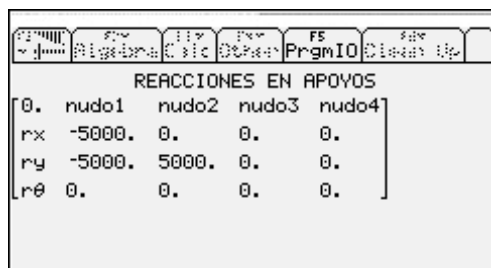
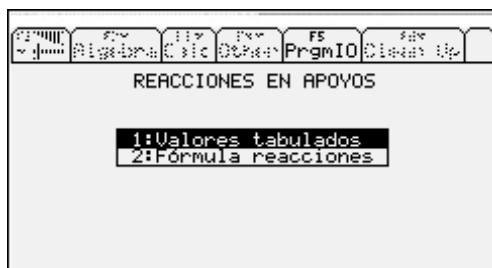
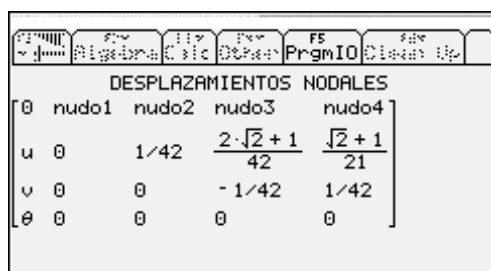
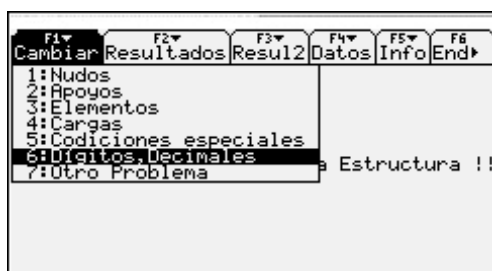
- ✓Elemento 1
- ✓Asignando Matrices [Ki]
- ✓Condiciones especiales
- ✓Cálculo matricial
- ▶Matrices Fuerza Empotramiento
- ▶Vectores carga, F. emp. y equiv.



**Soluciones al problema:**



Anesmf permite mostrar la solución aproximada y exacta. Para ello se cambia en el menú correspondiente el nº de decimales a presentar o la solución exacta:



ESFUERZOS LOCALES EN ELEMENTOS

1:Valores tabulados  
2:Fórmula esfuerzos

Recuerde que el signo de los Esfuerzos Axiales los da el Nudo Final del elemento

$Nx(f) > 0 \rightarrow$  Tracción ,  $Nx(f) < 0 \rightarrow$  Compresión

ESFUERZOS LOCALES EN ELEMENTOS

	elemen1	elemen2	elemen3	elemen4
nx(i)	-2500.	2500.	2500.	-2500.
ty(i)	0.	0.	0.	0.
mθ(i)	0.	0.	0.	0.
nx(f)	2500.	-2500.	-2500.	2500.
ty(f)	0.	0.	0.	0.
mθ(f)	0.	0.	0.	0.

ESFUERZOS LOCALES EN ELEMENTOS

	elemen3	elemen4	elemen5	elemen6
nx(i)	2500.	-2500.	3535.53	-3535.53
ty(i)	0.	0.	0.	0.
mθ(i)	0.	0.	0.	0.
nx(f)	-2500.	2500.	-3535.53	3535.53
ty(f)	0.	0.	0.	0.
mθ(f)	0.	0.	0.	0.

1: Clasificación, Grados Libertad  
2: Hallar [K] local barra  
3: Menú Matrices [K], [I],  
4: Menú Cargas (vca), (fem), (pi),  
5: Menú (d), (P), (R)  
6: Matriz Rigidez [K]  
7: Desplazamientos (d) (Nudo i)  
8: Fuerzas empotr. y equiv.  
9: Cargas totales  
A: Reacciones (R) (Nudo i)  
B: Esfuerzos (P) (Elemento j)  
C: Vector cargas (F)

1: Matriz Rigidez [K]  
2: Matriz Rigidez [K] simbólica  
3: Matriz [K] triang. por pasos

La matriz [K] de Rigidez se halla de:

$$[F] = [K] * [u] \rightarrow [K] = [u]^{-1} * [F]$$

[F] = vector de cargas globales  
[u] = vector desplazamientos globales  
[K] es la matriz simplificada para desplazamientos no nulos

Matriz [K] :

142123.	0.	0.	-37123.1	37123.1
0.	142123.	37123.1	-105000.	0.
0.	37123.1	142123.	0.	0.
-37123.1	-105000.	0.	142123.	-37123.1
37123.1	0.	0.	-37123.1	142123.

1: Matriz simbólica normal  
2: Matriz simbólica simplificada

La matriz [K] de Rigidez simbólica y simplificada, donde cada elemento es una submatriz de rigidez global de miembro...

Calculando...

Matriz de Rigidez [K] simbólica simplificada. La nomenclatura empleada es:

K → matriz rigidez global elemento

Submatriz K11 → caja superior izquierda  
Submatriz K12 → caja superior derecha  
Submatriz K21 → caja inferior izquierda  
Submatriz K22 → caja inferior derecha

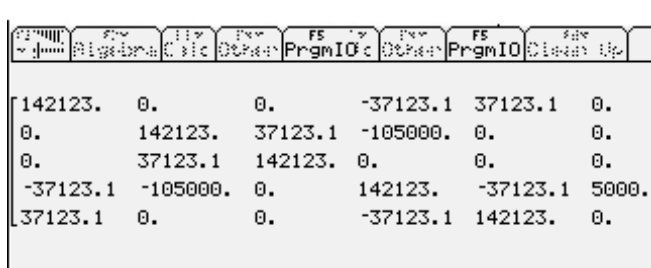
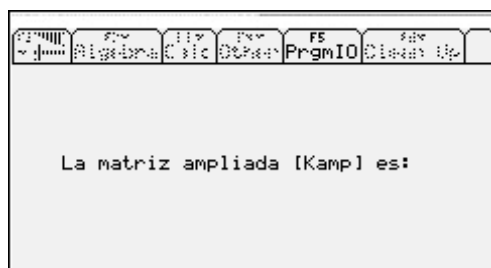
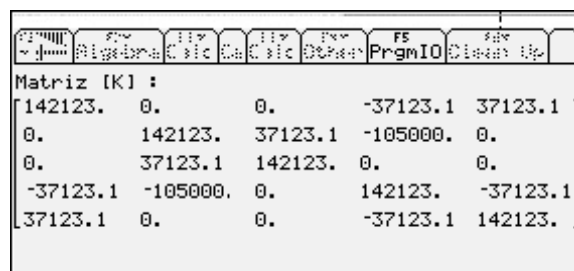
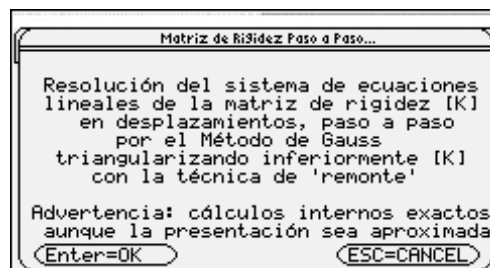
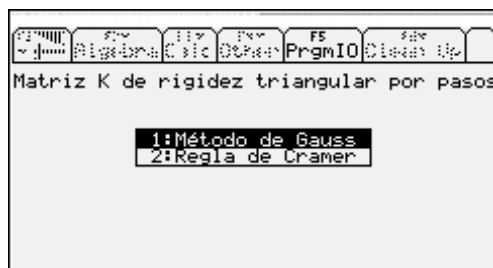
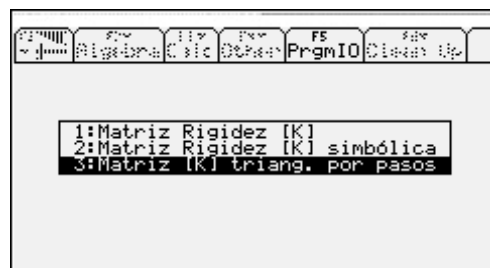
Entre paréntesis está el Elemento

Matriz de Rigidez [K]

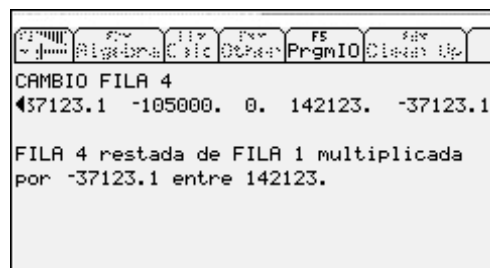
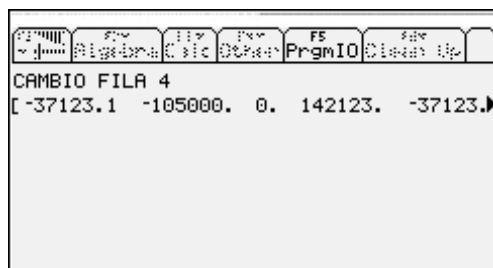
"Nudos"	2	3	4
2	$k11[2] + k22[5] + k22[1]$	$k12[2]$	$k21[5]$
3	$k21[2]$	$k22[6] + k22[3] + k22[2]$	$k21[3]$
4	$k12[5]$	$k12[3]$	$k11[5] + k11[3] + k22[4]$

## Desplazamientos calculados paso a paso mediante la matriz de rigidez.

Anesmf permite una vez resuelta la estructura, calcular paso a paso la obtención de las ecuaciones, por si se quiere conocer cómo se calculó. A continuación se verá como transforma la matriz de rigidez en triangularizada superior, para de esta forma aplicar remonte y calcular los desplazamientos. Se usará una de las dos técnicas: el método de Gauss. También podría calcularse por la regla de Cramer.



Comienza la triangularización de forma automática. Solo reflejaremos la matriz ampliada, aunque el programa presenta la matriz de rigidez normal también.



```

Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
RESULTA: NUEVA FILA 4
[0. -105000. 0. 132426. -27426.4]

```

```

Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
kamp2 =
[142123. 0. 0. -37123.1 37123.1 0.
0. 142123. 37123.1 -105000. 0. 0.
0. 37123.1 142123. 0. 0. 0.
0. -105000. 0. 132426. -27426.4 5000.
37123.1 0. 0. -37123.1 142123. 0.]

```

Se omite el resto del proceso de triangularización, hasta que el programa llega a la matriz triangularizada inferior y a la ampliada triangularizada (en pantalla abajo). Luego comienza a mostrar las matrices y vectores intervinientes y el sistema de ecuaciones a resolver.

```

Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
[142123. 0. 0. -37123.1 37123.1 0.
0. 142123. 37123.1 -105000. 0. 0.
0. 0. 132426. 27426.4 0. 0.
0. 0. 0. 49172.6 -27426.4 5000.
0. 0. 0. 0. 117129. 2788.79]

```

```

Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
El sistema matricial equivalente es:
[K]*[u]=[F] donde:

```

```

Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
Matriz [K] Triangularizada
[142123. 0. 0. -37123.1 37123.1
0. 142123. 37123.1 -105000. 0.
0. 0. 132426. 27426.4 0.
0. 0. 0. 49172.6 -27426.4
0. 0. 0. 0. 117129.]

```

```

Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
Vector [u]
[u2]
[u3]
[u3]
[u4]
[u4]

```

```

Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
Vector de cargas Triangularizado [F]
[0.
0.
0.
5000.
2788.79]

```

```

Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
Ecuaciones Matriciales
[142123. ·u2 - 37123.1 ·u4 + 37123.1 ·v4 = 0.]
[142123. ·u3 - 105000. ·u4 + 37123.1 ·v3 = 0.]
[27426.4 ·u4 + 132426. ·v3 = 0.]
[49172.6 ·u4 - 27426.4 ·v4 = 5000.]
[117129. ·v4 = 2788.79]

```

```

Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
Se ha practicado la técnica de
remonte de abajo hacia arriba
resultando las soluciones una tras una

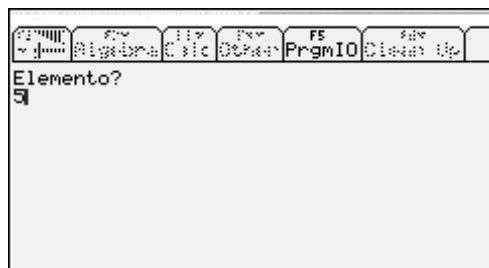
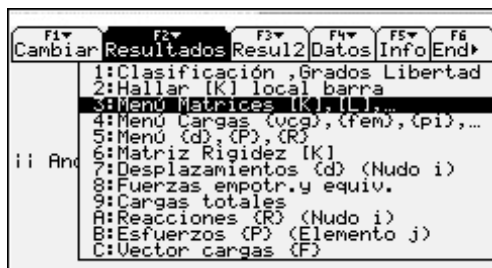
La solución al sistema planteado
que son los desplazamientos es:

u2 = .02381 and u3 = .091153 and u4 = .114963 and v3 = -.02381 and v4 = .02381

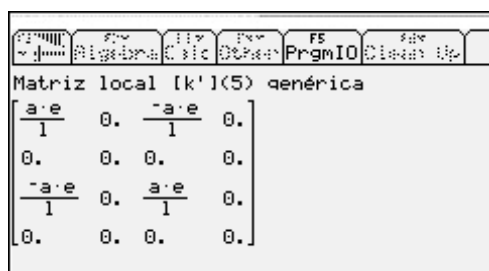
```

### Matrices de cada elemento.

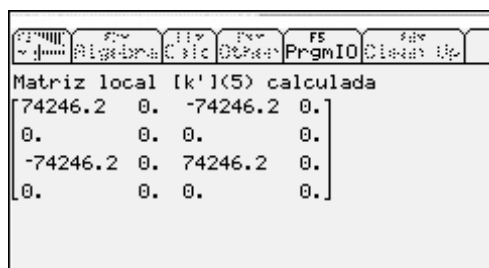
Las matrices locales de cada barra también son calculadas, así como otros numerosos cálculos como se muestra en el menú de resultados. A continuación se calcularán las relativas al elemento 5.



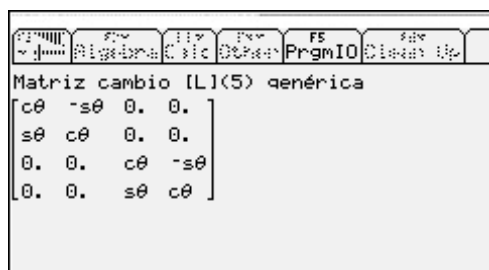
Matriz local genérica.



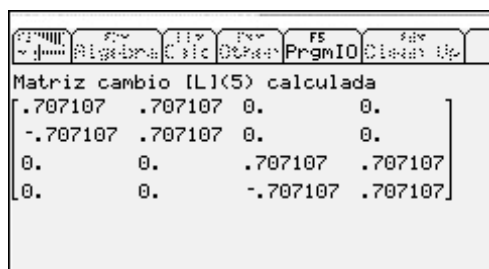
Matriz local calculada.



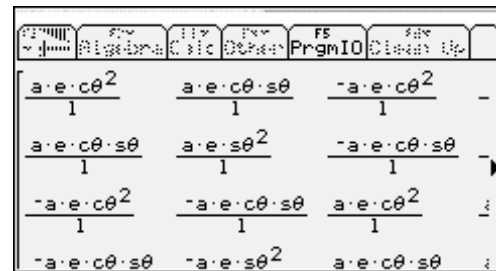
Matriz de cambio genérica. Está escrito abreviadamente el seno y el coseno.



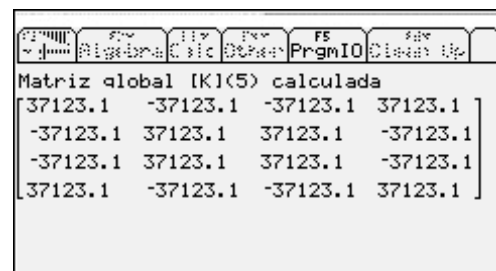
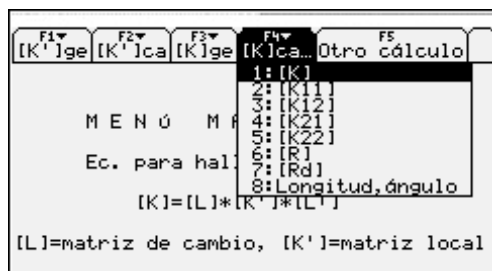
Matriz de cambio calculada.



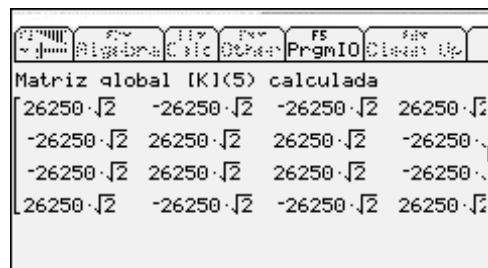
Matriz global genérica.



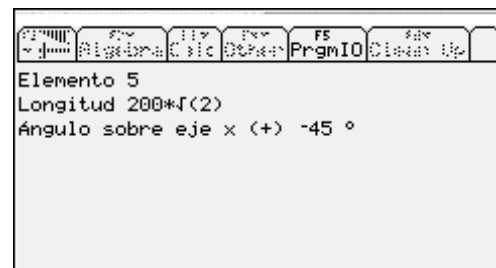
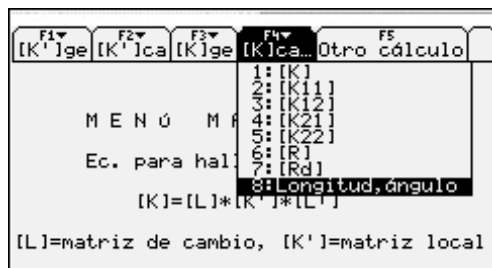
Matriz global calculada (en modo aproximado).



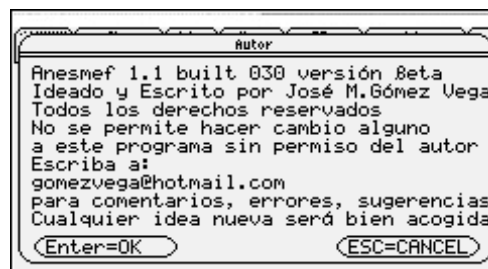
Matriz global calculada (en modo auto).



Longitud y ángulo.



Obsérvese que tal y como hemos definido el elemento 5, con el nudo inicial el 4 y el nudo final el 2, es claro que el ángulo que forma con la horizontal es  $-45^\circ$ , que es equivalente a  $315^\circ$ . El programa opta por el ángulo que sea en términos absolutos menor para mostrar en pantalla.



**Anexo:**

**Demostrar que la ec. 12:**

$$\Delta L_k = U_{L_j} - U_{L_i} = (u_j \cos \alpha + v_j \sin \alpha) - (u_i \cos \alpha + v_i \sin \alpha)$$

**no es válida para todos los cuadrantes.**

Supongamos la barra en el 2º cuadrante tal y como aparece en la fig. 6:

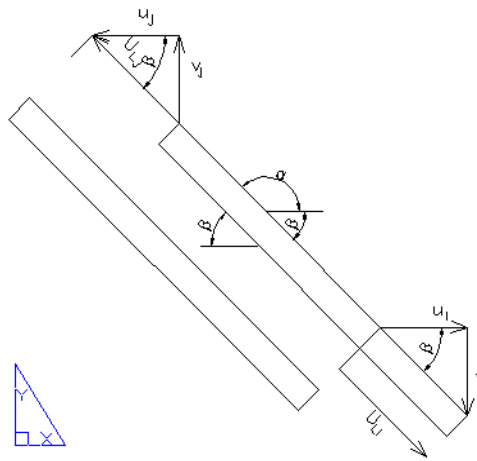


Fig. 6. Barra en el 2º cuadrante

A la hora de emplear las relaciones trigonométricas, vemos la relación entre  $\alpha$  y  $\beta$ , sin olvidar que deberemos expresar las ecuaciones al final en función de  $\alpha$ .

Es claro que:

$$\beta = \pi - \alpha$$

Desarrollando el seno y el coseno, tenemos:

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \sin(\pi - \alpha) = \sin \pi \cos \alpha - \sin \alpha \cos \pi = \sin \alpha \\ \cos \beta &= \cos(\pi - \alpha) = \cos \pi \cos \alpha + \sin \pi \sin \alpha = -\cos \alpha \end{aligned}$$

Observando la figura, se puede escribir:

$$\begin{aligned} \Delta L'_k &= U'_{L_j} - U'_{L_i} = (-u_j \cos \beta + v_j \sin \beta) - (u_i \cos \beta + v_i \sin \beta) = -u_j(-\cos \alpha) + v_j \sin \alpha - u_i(-\cos \alpha) + v_i \sin \alpha = \\ &= (u_j \cos \alpha + v_j \sin \alpha) - (-u_i \cos \alpha - v_i \sin \alpha) \end{aligned}$$

y queda demostrado que  $\Delta L'_k \neq \Delta L_k$ , por lo que se concluye que la ec. 12 no es universal para todos los cuadrantes en los que esté posicionada la barra y que habrá que tenerlo en cuenta.

---

Ud. puede encontrar el programa **Anesmef** en las direcciones:

<http://www.ticalc.org/archives/files/fileinfo/359/35956.html> (puede ver otras pantallas de Anesmef).

<http://www.ticalc.org/archives/files/fileinfo/372/37265.html> (puede ver videos de Anesmef).

<http://www.euskalnet.net/jmgomez/anesmef/anesmef1.html> (manual y ejemplos de problemas en línea).

**Anesclas** está en una versión beta no publicada aún.

**Nota:** *Este artículo hace referencia al ejemplo nº 1 aparecido en "Teoría general del MEF" - AF 1 del curso modular de "Teoría y aplicación práctica del método de los elementos finitos y simulación", texto según reimpresión 2.001 y muestra métodos de resolución con programas informáticos hechos por el autor de este artículo, José Manuel Gómez Vega, ingeniero industrial en mecánica de máquinas.*