

Cálculo de la resistencia de pernos en una viga atornillada con cargas solo puntuales y con cargas puntuales y uniformemente repartidas y elección de perfil según DB-SE-A y textos clásicos de diseño de ingeniería mecánica.

(por el Ingeniero Industrial José Manuel Gómez Vega)

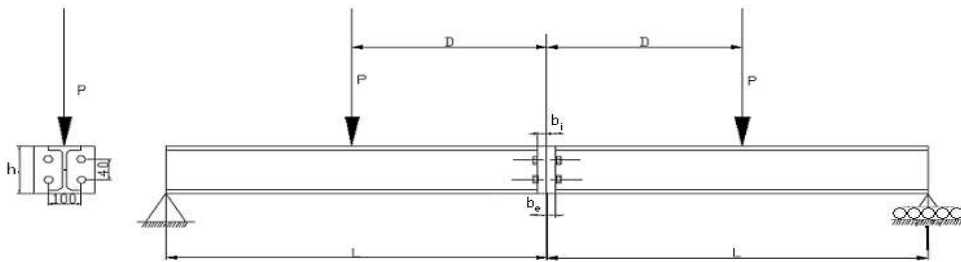


Fig. 1. Viga con pernos

1 Introducción al problema.

Se tiene la viga atornillada dispuesta tal y como aparece en la fig. 1. Obsérvese que se trata de dos apoyos articulados, siendo el de la izquierda normal y el de la derecha con rodillo, permitiendo el deslizamiento hacia la izquierda, pues al flectar no puede existir resistencia infinita a la flexión y la deformada hará que la distancia recta entre los apoyos, disminuya. Según el planteamiento parece que se trata de un empalme atornillado de piezas de igual perfil en prolongación recta mediante chapas frontales tipo brida, según la nomenclatura del programa Cype (ver fig. 2), salvo que la orientación es horizontal. Las chapas irán atornilladas y soldadas a la viga en su contorno periférico. Se pretende hacer el cálculo completo de la resistencia de los pernos. No obstante, no se comprueba ni calcula la unión soldada.

Este artículo intenta responder a la cuestión aparecida en el **foro de Solingeniería.net** titulado "*Calculo tornillos tracción flexion cizalladura*" que aparece en:

<http://www.soloingenieria.net/foros/viewtopic.php?f=26&t=22867&p=194727#p194727>

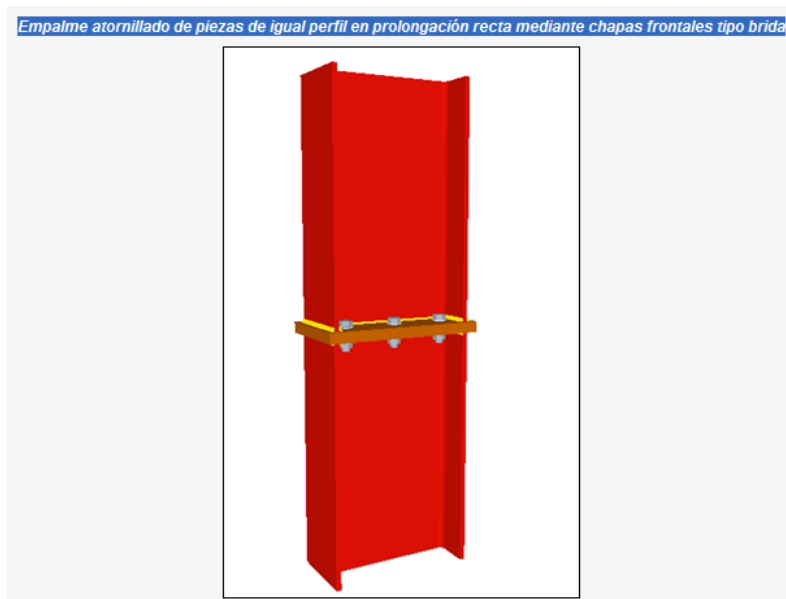


Fig. 2a. Vigas atornilladas de igual perfil

Tomaremos la hipótesis de que la viga será, en un principio, una de doble T de nominal 100, dado que en la fig. 1 observamos que la distancia entre centros coincide con la dimensión de la base de los perfiles (100 mm). Además, suponemos que es, en concreto, una de doble T de ala ancha, serie ligera (HEA), para considerar una aplicación numérica de cálculo. No obstante, luego veremos que para el plantamiento del problema numérico es imposible un perfil HEA 100. **Lo que vamos a tratar de calcular en este artículo es el cálculo y comprobación de la resistencia de los pernos de la unión y el perfil de la viga para una determinada carga.**

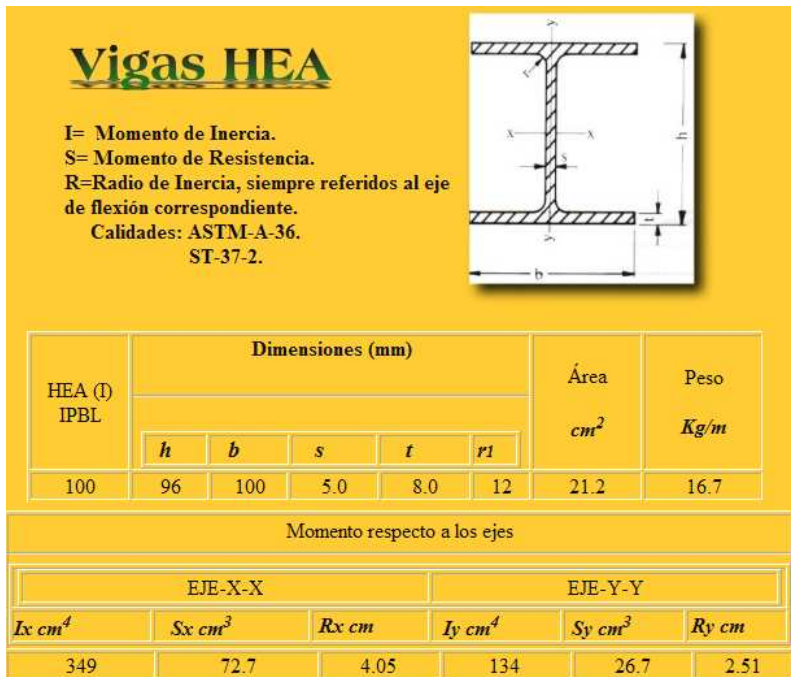


Fig. 2b. Características del perfil HEA 100

Se dan los siguientes datos para realizar una aplicación numérica:

$$\begin{aligned}
 P &= 1,5 \text{ kN} & D &= \frac{L}{2} = 2 \text{ m} & L &= 4 \text{ m} & h &= 96 \text{ mm} \\
 E &= 210.000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} & I_x &= 3.490.000 \text{ mm}^4 & W_x &= 72,8 \text{ cm}^3 & b_i &= b_e = 35 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

Primeramente tras observar la fig. 3, reparamos en que la unión de la zona media de la unión de las dos vigas, a pesar de estar soldada y atornillada, presenta continuidad, por lo que para el análisis se puede considerar una sola viga, dado que no existe coacción o apoyo.

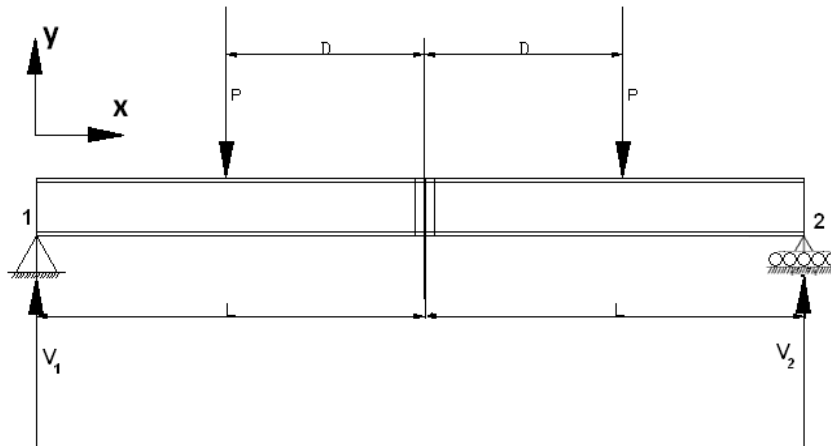


Fig. 3. Diagrama estructura

Vamos a realizar por los procedimientos de Resistencia de Materiales, el cálculo de la ec. universal de la deformada elástica, para hallar la flecha en la estructura, considerando como ya se ha adelantado, una sola viga.

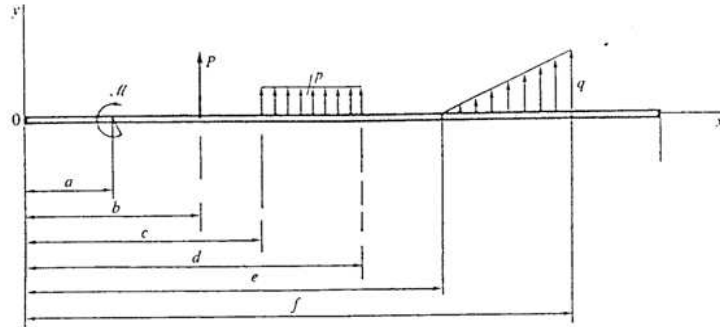


Fig. 3a. Diagrama elástica

La ecuación universal de la deformada elástica para cualesquiera fuerzas en una viga es:

$$EIy = EIy_0 + EI\theta_0x + \sum_i \frac{M_i \langle x-a_i \rangle^3}{2!} + \sum_i \frac{P_i \langle x-b_i \rangle^3}{3!} + \sum_i \frac{p_i [\langle x-c_i \rangle^4 - \langle x-d_i \rangle^4]}{4!} + \sum_i q_i \left[\frac{\langle x-e_i \rangle^5 - \langle x-f_i \rangle^5}{(f_i-e_i)5!} - \frac{\langle x-f_i \rangle^5}{4!} \right]$$

2 Cálculo solo con cargas puntuales.

Nota: este apartado es una simplificación del problema pero no es real pues se estima que el propio peso de la viga no es despreciable nunca.

La ec. universal de la deformada elástica exclusivamente para fuerzas puntuales (cargas y reacciones en nudos no finales) es:

$$EIy = EIy_0 + EI\theta_0x + \sum_i \frac{P_i \langle x-b_i \rangle^3}{3!}$$

donde la función de discontinuidad que aparece se define de la siguiente forma:

$$\langle x-b_i \rangle^3 = \begin{cases} 0, & \text{cuando } x \leq b_i \\ (x-b_i)^3, & \text{cuando } x > b_i \end{cases}$$

Planteamos las ecuaciones de la estática para hallar las reacciones:

$$\begin{cases} \sum H \equiv 0 \\ \sum V = 0 \Rightarrow V_1 + V_2 - 2P = 0 \\ \sum M_{(1)} = 0 \Rightarrow -P\frac{L}{2} - P\frac{3L}{2} + V_2 2L = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = P = 1.500 \text{ N} \\ V_2 = P = 1.500 \text{ N} \end{cases}$$

En el caso actual, las cargas puntuales son dirigidas hacia abajo del eje vertical, luego tienen signo menos. Entonces, observando la fig. 1, se tiene:

$$\begin{aligned} EIy &= EIy_0 + EI\theta_0 x + \frac{V_1 \langle x-0 \rangle^3 - P \langle x-\frac{L}{2} \rangle^3 - P \langle x-\frac{3L}{2} \rangle^3}{6} \Rightarrow \\ &\Rightarrow EIy = EIy_0 + EI\theta_0 x + P \left[\frac{\langle x-0 \rangle^3 - \langle x-\frac{L}{2} \rangle^3 - \langle x-\frac{3L}{2} \rangle^3}{6} \right] \end{aligned}$$

Las constantes y_0 y θ_0 , que representan respectivamente el corrimiento vertical del centro de gravedad de la sección origen de abscisas y el ángulo girado por la sección que contiene al origen de coordenadas, se calculan imponiendo condiciones de contorno:

$$y = 0, x = 0 \Rightarrow 0 = EIy_0 + 0 + 0, \text{ despejando: } y_0 = 0,$$

que es fácil verlo por la coacción en el eje vertical debida al apoyo articulado

$$\begin{aligned} y = 0, x = 2L \Rightarrow 0 &= 0 + EI\theta_0 2L + P \left[\frac{(2L-0)^3 - (2L-\frac{L}{2})^3 - (2L-\frac{3L}{2})^3}{6} \right], \\ \text{despejando: } \theta_0 &= -\frac{3PL^2}{8EI} \end{aligned}$$

La ecuación de la deformada queda:

$$y = -\frac{3PL^2}{8EI} x + P \left[\frac{\langle x-0 \rangle^3 - \langle x-\frac{L}{2} \rangle^3 - \langle x-\frac{3L}{2} \rangle^3}{6EI} \right]$$

es decir:

$$y = \begin{cases} -\frac{3PL^2}{8EI} x + P \left[\frac{x^3}{6EI} \right] & , \text{ cuando } x \leq \frac{L}{2} \\ -\frac{3PL^2}{8EI} x + P \left[\frac{x^3 - (x-\frac{L}{2})^3}{6EI} \right] & , \text{ cuando } \frac{L}{2} < x \leq \frac{3L}{2} \\ -\frac{3PL^2}{8EI} x + P \left[\frac{x^3 - (x-\frac{L}{2})^3 - (x-\frac{3L}{2})^3}{6EI} \right] & , \text{ cuando } x > \frac{3L}{2} \end{cases}$$

Derivando respecto a x en la ecuación anterior, obtenemos la ecuación de la ley de giros de las secciones en función de la abscisa:

$$\theta = \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{3PL^2}{8EI} + P \left[\frac{\langle x-0 \rangle^2 - \langle x-\frac{L}{2} \rangle^2 - \langle x-\frac{3L}{2} \rangle^2}{2EI} \right]$$

es decir:

$$\theta = \begin{cases} -\frac{3PL^2}{8EI} + P \left[\frac{x^2}{2EI} \right] & , \text{ cuando } x \leq \frac{L}{2} \\ -\frac{3PL^2}{8EI} + P \left[\frac{x^2 - (x - \frac{L}{2})^2}{2EI} \right] & , \text{ cuando } \frac{L}{2} < x \leq \frac{3L}{2} \\ -\frac{3PL^2}{8EI} + P \left[\frac{x^2 - (x - \frac{L}{2})^2 - (x - \frac{3L}{2})^2}{2EI} \right] & , \text{ cuando } x > \frac{3L}{2} \end{cases}$$

La flecha en la viga se obtendrá en el valor de x tal que $EI\theta(x) = 0$, en la ecuación anterior. La flecha o valor máximo de corrimiento vertical se consigue cuando $\theta = 0$, porque no existe ángulo con la horizontal, es decir, la tangente en el punto es horizontal, condición de punto extremo. Para ello debemos buscar entre las franjas donde existen diferentes expresiones e igualar a 0 las ecuaciones y comprobar si los resultados son coherentes en cada franja:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow EI\theta(0) = -\frac{3PL^2}{8} + P \left[\frac{0^2}{2} \right] = -\frac{3PL^2}{8} \neq 0 \\ x = \frac{L}{2} \Rightarrow EI\theta\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{3PL^2}{8} + P \left[\frac{\left(\frac{L}{2}\right)^2}{2} \right] = -\frac{1}{4}L^2P \neq 0 \\ x = L \Rightarrow EI\theta(L) = -\frac{3PL^2}{8} + P \left[\frac{(L)^2 - (L - \frac{L}{2})^2}{2} \right] = 0 \\ x = \frac{3L}{2} \Rightarrow EI\theta\left(\frac{3L}{2}\right) = -\frac{3PL^2}{8} + P \left[\frac{\left(\frac{3L}{2}\right)^2 - \left(\frac{3L}{2} - \frac{L}{2}\right)^2 - \left(\frac{3L}{2} - \frac{3L}{2}\right)^2}{2EI} \right] = -\frac{1}{8}L^2 \frac{P}{EI} (3EI - 5) \neq 0 \\ x = 2L \Rightarrow EI\theta(2L) = -\frac{3PL^2}{8} + P \left[\frac{(2L)^2 - (2L - \frac{L}{2})^2 - (2L - \frac{3L}{2})^2}{2EI} \right] = -\frac{3}{8}L^2 \frac{P}{EI} (EI - 2) \neq 0 \end{array} \right.$$

Por lo tanto, después de observar los valores en los tramos, con los puntos donde puede haber tangente horizontal, se comprueba que se produce cuando $x = L$, ya que tenemos tangente horizontal, es decir, $EI\theta(L) = 0$

El valor de la flecha f para $x = L$ vale:

$$f = y(x_{\theta=0} = L) = -\frac{3PL^2}{8EI}L + P \left[\frac{L^3 - (L - \frac{L}{2})^3}{6EI} \right] = -\frac{11}{48} \frac{PL^3}{EI} = -30,018 \text{ mm}$$

Obsérvese que la flecha se da en $x = L = 4.000 \text{ mm}$, que es el punto medio de la viga y se puede deducir por simetría.

No sabemos la viga si forma parte de una planta, de una cubierta...Según el apartado 4.3.3.1 *Flechas*, del Documento Básico SE (Seguridad estructural) del CTE, vamos a suponer que la flecha máxima admisible es $\frac{l}{300}$ (no confundir longitud l o luz de la viga, con la longitud L , que representa la mitad de toda la viga y es donde se produce la flecha):

$$|f| \leq |f_{m\acute{a}x}| \Rightarrow |f_{m\acute{a}x}| = \frac{8.000}{300} = 26,667 \text{ mm}$$

Por lo tanto, vemos claramente que el perfil de la viga, NO CUMPLE, ya que:

$$|f| > |f_{m\acute{a}x}|$$

Cumpliría con un perfil HEA 120 (se demuestra a continuación).

Ahora, para que la viga cumpla con este prerrequisito preceptivo, vamos a rediseñar la viga (manteniendo HEA 100):

2.1 (1°) Haciendo que la luz de la viga l sea lo más larga posible tal que cumpla la resistencia, con el valor mínimo, es decir, cuando $|f| = |f_{máx}|$

Rellenamos una tabla con aproximaciones sucesivas. Obtenemos:

l (mm)	L (mm)	$ f $ (mm)	$ f_{máx} $ (mm)	¿Cumple $ f \leq f_{máx} $?
8.000	4.000	30, 020	26, 667	No
7.550	3.775	25, 232	25, 167	No
7.540	3.770	25, 132	25, 133	Sí
7.500	3.750	24, 734	25, 000	Sí
7.000	3.500	20, 110	23, 334	Sí

Por lo tanto, la longitud máxima de la viga para cumplir la resistencia es de luz $L = 7.540$ mm, es decir, compuesta por 2 vigas de 3.770 mm para asegurar la resistencia. No obstante, las vigas tienen tamaños estándar.

2.2 (2°) Con la misma luz L , modificar la inercia I y con ella el perfil de la viga.

Como $l = 2L = 8.000$ mm, tenemos:

$$\frac{11}{48} \frac{PL^3}{EI} = \frac{2L}{300} \Rightarrow I = \frac{275}{8} \frac{PL^2}{E} = 3.928.571 \text{ mm}^4$$

Entonces nos tendríamos que ir a un perfil HEA 120, con $I = 6.060.000 \text{ mm}^4$

Una opción es seguir con el perfil HEA 100, pero tomando $L = 3.500$ mm, dado que el valor límite $L = 3.770$ mm agota la resistencia de la viga hasta el límite en caso de que el nivel preceptivo se correspondiese al máximo valor indicado en el mayorando $f_{máx}$.

Finalmente en la zona de atornillamiento de pernos, el valor de la flecha no variará en exceso. Por lo tanto, la flecha en el punto medio de la viga en dicho entorno será para el nuevo valor de L :

$$f = -\frac{11}{48} \frac{PL^3}{EI} = 20, 110 < 26, 667$$

Nota importante: se han tenido en cuenta solo cargas puntuales concentradas P . Sin embargo, la realidad en cálculo estructural es que casi siempre existirán cargas uniformemente repartidas, al menos debidas al propio peso de la viga. Vamos a suponer que existen cargas uniformemente repartidas también y realicemos el siguiente apartado acercándonos más a la realidad.

3 Cálculo con cargas uniformemente repartidas p y cargas puntuales P .

Este va a ser el problema real, el caso anterior no se cumple en la realidad dado que la carga uniformemente repartida por unidad de longitud p nunca será despreciable.

Vamos a partir de la base de que el perfil HEA 100 no vale. Tomaremos un perfil HEA 140, dado que tenemos más cargas que para el caso anterior que valía para flechas admisibles equivalentes a perfil HEA 120. Mantenemos la longitud $L = 4.000 \text{ mm}$.

La inercia para este perfil es:

$$I_x = 10.300.000 \text{ mm}^4$$

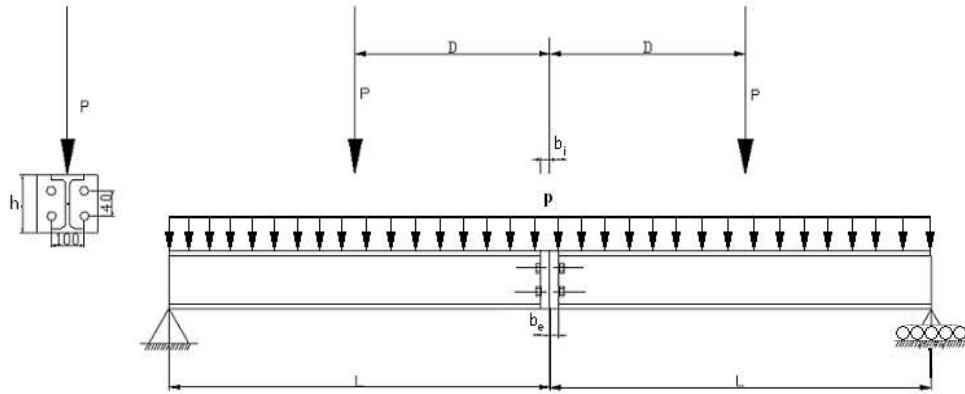


Fig. 3a. Cargas uniformes y puntuales

La ecuación universal de la deformada elástica para este caso es:

$$EIy = EIy_0 + EI\theta_0 x + \frac{P_i \langle x - b_i \rangle^3}{3!} + \sum_i \frac{p_i [\langle x - c_i \rangle^4 - \langle x - d_i \rangle^4]}{4!}$$

La carga uniformemente repartida p estará en toda la longitud de la viga, por lo que: $\begin{cases} c_i = 0 \\ \langle x - d_i \rangle^4 \text{ término no existente} \end{cases}$

Consideremos $p = \frac{P}{2L}$, la carga uniforme por metro lineal.

Planteamos las ecuaciones de la estática para hallar las reacciones:

$$\begin{cases} \sum H \equiv 0 \\ \sum V = 0 \Rightarrow V_1 + V_2 - 2P - 2pL = 0 \\ \sum M_{(1)} = 0 \Rightarrow -P\frac{L}{2} - P\frac{3L}{2} + V_2 2L - 2pL^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = P + pL = P + \left(\frac{P}{2L}\right)L = \frac{3}{2}P = 2.250 \text{ N} \\ V_2 = P + pL = V_1 = 2.250 \text{ N} \end{cases}$$

En el caso actual, se tiene:

- una carga vertical debida a la reacción, hacia arriba en la sección del apoyo 1.
- una carga vertical por la carga puntual P , hacia abajo, en la sección a $L/2$ del apoyo 1.
- una carga vertical por la carga puntual P , hacia abajo, en la sección a $3L/2$ del apoyo 1.
- una carga uniformemente repartida p hacia abajo en toda la longitud de la viga.

$$EIy = EIy_0 + EI\theta_0x + \frac{V_1(x-0)^3 - P\langle x-\frac{L}{2} \rangle^3 - P\langle x-\frac{3L}{2} \rangle^3}{6} + \left(\frac{-p(x-0)^4}{24} \right) \Rightarrow$$

$$EIy = EIy_0 + EI\theta_0x + \frac{\frac{3}{2}P(x-0)^3 - P\langle x-\frac{L}{2} \rangle^3 - P\langle x-\frac{3L}{2} \rangle^3}{6} - \frac{P}{48}(x-0)^4$$

Como antes, calculamos las constantes y_0 y θ_0 :

$$y = 0, x = 0 \Rightarrow y_0 = 0,$$

$$y = 0, x = 2L \Rightarrow 0 = 0 + EI\theta_0 2L + \frac{\frac{3}{2}P(2L)^3 - P(2L-\frac{L}{2})^3 - P(2L-\frac{3L}{2})^3}{6} - \frac{P}{48}(2L)^4,$$

despejando: $\theta_0 = -\frac{13PL^2}{24EI}$

La ecuación de la deformada queda:

$$y = -\frac{13PL^2}{24EI}x + \frac{\frac{3}{2}P(x-0)^3 - P\langle x-\frac{L}{2} \rangle^3 - P\langle x-\frac{3L}{2} \rangle^3}{6EI} - \frac{P}{48EI}(x-0)^4$$

es decir:

$$y = \begin{cases} -\frac{13PL^2}{24EI}x + \frac{3Px^3}{12EI} - \frac{Px^4}{48LEI} & , \text{ si } x \leq \frac{L}{2} \\ -\frac{13PL^2}{24EI}x + \frac{3Px^3}{12EI} - \frac{P(x-\frac{L}{2})^3}{6EI} - \frac{Px^4}{48LEI} & , \text{ si } \frac{L}{2} < x \leq \frac{3L}{2} \\ -\frac{13PL^2}{24EI}x + \frac{3Px^3}{12EI} - \frac{P(x-\frac{L}{2})^3}{6EI} - \frac{P(x-\frac{3L}{2})^3}{6EI} - \frac{Px^4}{48LEI} & , \text{ si } x > \frac{3L}{2} \end{cases}$$

Derivando respecto a x en la ecuación anterior, obtenemos la ecuación de la ley de giros de las secciones en función de la abscisa:

$$\theta = \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{13PL^2}{24EI} + \frac{\frac{3}{2}P(x-0)^2 - P\langle x-\frac{L}{2} \rangle^2 - P\langle x-\frac{3L}{2} \rangle^2}{2EI} - \frac{P}{12EI}(x-0)^3$$

es decir:

$$\theta = \begin{cases} -\frac{13PL^2}{24EI} + \frac{3Px^2}{4EI} - \frac{Px^3}{12LEI} & , \text{ cuando } x \leq \frac{L}{2} \\ -\frac{13PL^2}{24EI} + \frac{\frac{3}{2}Px^2 - P(x-\frac{L}{2})^2}{2EI} - \frac{Px^3}{12LEI} & , \text{ cuando } \frac{L}{2} < x \leq \frac{3L}{2} \\ -\frac{13PL^2}{24EI} + \frac{\frac{3}{2}Px^2 - P(x-\frac{L}{2})^2 - P(x-\frac{3L}{2})^2}{2EI} - \frac{Px^3}{12LEI} & , \text{ cuando } x > \frac{3L}{2} \end{cases}$$

A continuación buscamos la tangente horizontal, probando en todos los intervalos lo siguiente:

$$EI\theta(x) = 0$$

para los distintos valores frontera donde existan discontinuidades según las funciones de acuerdo a los distintos intervalos

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow EI\theta(0) = -\frac{13PL^2}{24} + \frac{3P(0)^2}{4} - \frac{P(0)^3}{12L} = -\frac{13PL^2}{24} \neq 0 \\ x = \frac{L}{2} \Rightarrow EI\theta(\frac{L}{2}) = -\frac{13PL^2}{24} + \frac{\frac{3}{2}P(\frac{L}{2})^2 - P(\frac{L}{2} - \frac{L}{2})^2}{2} - \frac{P(\frac{L}{2})^3}{12L} = -\frac{35}{96}L^2P \neq 0 \\ x = L \Rightarrow EI\theta(L) = -\frac{13PL^2}{24} + \frac{\frac{3}{2}P(L)^2 - P(L - \frac{L}{2})^2}{2} - \frac{P(L)^3}{12L} = 0 \\ x = \frac{3L}{2} \Rightarrow EI\theta(\frac{3L}{2}) = -\frac{13PL^2}{24} + \frac{\frac{3}{2}P(\frac{3L}{2})^2 - P[(\frac{3L}{2}) - \frac{L}{2}]^2 - P(\frac{3L}{2} - \frac{3L}{2})^2}{2} - \frac{P(\frac{3L}{2})^3}{12L} = \frac{35}{96}L^2P \neq 0 \\ x = 2L \Rightarrow EI\theta(2L) = -\frac{13PL^2}{24} + \frac{\frac{3}{2}P(2L)^2 - P(2L - \frac{L}{2})^2 - P(2L - \frac{3L}{2})^2}{2} - \frac{P(2L)^3}{12L} = \frac{13}{24}L^2P \neq 0 \end{array} \right.$$

La flecha en la viga se obtendrá en el valor de x tal que $EI\theta(x) = 0$, en la ecuación anterior. La flecha o valor máximo de corrimiento vertical se consigue cuando $EI\theta(L) = 0$, porque no existe ángulo con la horizontal, es decir, la tangente en el punto es horizontal, condición de punto extremo. Para ello debemos buscar entre las franjas donde existen diferentes expresiones e igualar a 0 las ecuaciones y comprobar si los resultados son coherentes en cada franja.

El valor de la flecha f para $x = L$ vale:

$$f = y(x_{EI\theta=0} = L) = -\frac{13PL^2}{24EI}L + \frac{3PL^3}{12EI} - \frac{P(L - \frac{L}{2})^3}{6EI} - \frac{PL^4}{48LEI} = -\frac{1}{3}\frac{PL^3}{EI} = -14,794 \text{ mm}$$

Como sabemos que se debe verificar:

$$|f_{máx}| = \frac{8,000}{300} = 26,667 \text{ mm}$$

En efecto:

$$|f| \leq |f_{máx}| \rightarrow 14,794 < 26,667 \rightarrow \text{CUMPLE, con un margen de seguridad de } \frac{26,667}{14,794} = 1,80$$

Obsérvese que la flecha se da en $x = L = 4.000 \text{ mm}$, que es el punto medio de la viga y se puede deducir por simetría.

Se entiende que pueden suceder dos hipótesis respecto al corrimiento vertical máximo:

1. Que el corrimiento vertical en el centro de la viga (f_1) por efectos de las cargas deba ser inferior a la flecha f para asegurar la funcionalidad de los pernos en la unión, es decir, que $f_1 < f$

2. Que el corrimiento vertical en dicho nudo pudiera llegar al valor máximo de la flecha en la viga, es decir que se pudiera cumplir $f_1 = f$

A continuación vamos a calcular los momentos flectores y los esfuerzos cortantes en la sección de la flecha.

Nos damos cuenta que los momentos flectores están distribuidos sobre un eje de inercia, por lo que no existe flexión desviada, y naturalmente tampoco flexión compuesta. Estamos en un caso de flexión simple con esfuerzos cortantes exclusivamente.

$$EI \frac{\partial \theta}{\partial x} = M(x) \rightarrow \text{Momentos flectores}$$

$$EI \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial M(x)}{\partial x} = V(x) \rightarrow \text{Esfuerzos cortantes}$$

Tomaremos solo la ecuación de los giros para el tramo en que la flecha es máxima.

$$EI \theta = -\frac{13PL^2}{24} + \frac{\frac{3}{2}Px^2 - P(x - \frac{L}{2})^2}{2} - \frac{Px^3}{12L}$$

$$M(x) = EI \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} = \frac{3Px - 2P(x - \frac{L}{2})}{2} - \frac{Px^2}{4L} \rightarrow M(L) = EI \frac{\partial \theta(L)}{\partial x} =$$

$$\frac{3PL - 2P(L - \frac{L}{2})}{2} - \frac{PL^2}{4L} = \frac{3PL}{4}$$

$$V(x) = \frac{\partial M(x)}{\partial x} = EI \frac{\partial^2 \theta(x)}{\partial x^2} = \frac{P}{2} \rightarrow V(L) = EI \frac{\partial^2 \theta(L)}{\partial x^2} = \frac{P}{2}$$

$$N(x) = 0$$

Vamos a realizar el problema calculando la resistencia primero mediante textos clásicos de diseño en ingeniería mecánica y luego vamos a operar según el Documento Básico SE para aceros del Código Técnico de la Edificación.

4 Cálculo según textos clásicos de diseño en ingeniería mecánica.

Consideramos a partir de ahora, el **perfil HEA 140**.

En uniones de tornillo a cortante no se deben someter a un esfuerzo adicional o sobreapriete más fuerte que el apriete inicial. La carga de cortante se resiste bien mediante tornillos o pernos soportada por la fricción entre elementos o por pasadores de montaje.

Para la unión, se debe elegir bien la ubicación del centro de masas relativo de los elementos, debiéndose calcular el centroide (x,y) para comenzar el cálculo de fuerzas de los pernos/pasadores. En el caso presente de unión atornillada,

por simetría puede encontrarse fácilmente dicho centro, que equidista dentro del rectángulo imaginario inscrito, tal y como puede apreciarse en la fig. 4.

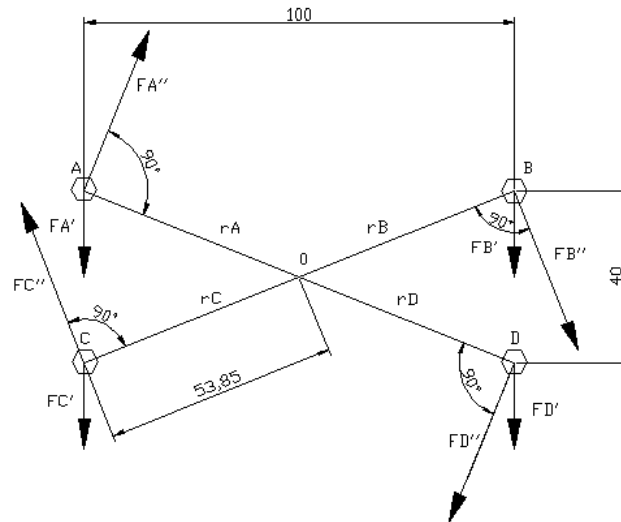


Fig. 4. Geometría fuerzas en tornillos

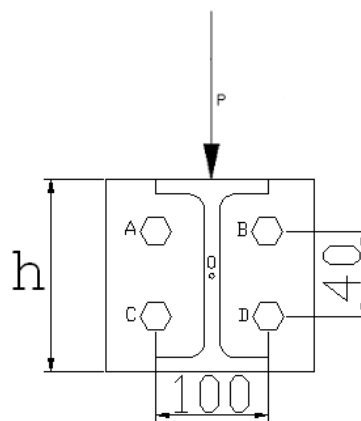


Fig. 5. Numeración pernos

4.1 Cálculo de la carga total o resultante en cada perno (solo cargas puntuales).

La carga en cada perno se divide en 2 componentes: F' y F'' . La forma de calcular la carga total en cada perno se realizará en 3 fases:

1. Se halla la carga directa o cortante primario F' .

En un principio se considera la hipótesis de que la carga cortante se reparte uniformemente entre todos los pernos por igual lo que supone un elemento totalmente rígido, haciendo $F' = \frac{V}{n}$, donde n es el n^o de pernos. Como en el caso que nos ocupa tenemos 4 pernos, y la carga cortante es $V = V_1 = P$, tenemos para cada uno de los 4 pernos, numerados A, B, C y D (observar fig. 5) que:

$$F'_A = \dots = F'_D = F' = \frac{P}{4}$$

2 Se halla la carga del momento M o cortante secundario F'' .

La ecuación que permite calcular F'' es para el perno j -ésimo:

$$F''_j = \frac{M \cdot r_j}{\sum_{i=1}^n r_i^2}$$

Para realizar el cálculo, y observando la simetría geométrica y de cargas, vemos que dado que los esfuerzos en el nudo 2 descompuestos en elementos viga se anulan al establecer la viga compuesta, no existirá momento M en el nudo 2. No obstante, la fig. 4 se refiere a un caso general donde sí existiría momento no nulo y donde habría que calcularse componiendo F'' y F' .

Como el momento M es nulo, al tener en cuenta la equidistancia de la fig. 4 del vector r de posición de cada perno al centro geométrico O , se tiene:

$$F''_j = \frac{M \cdot r}{4r^2} = \frac{M}{4r} = 0, \text{ dado que } M = 0$$

3 Se obtiene la carga total F en cada perno.

Se debe hallar el vector \vec{F}_j en cada perno. Nos ceñiremos al perno A pues por simetría es fácil deducir los restantes. Nuevamente la fig. 6 hace referencia a la situación en la que F''_j no fuese nula, para que se vea geoméricamente el caso general.

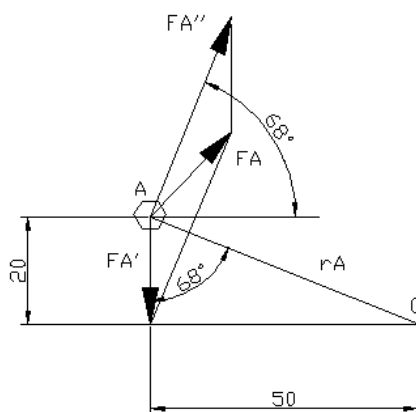


Fig. 6. Fuerzas en nudo A

En la fig. 6, deducimos la equivalencia del ángulo α .

$$\alpha = \arccos\left(\frac{20}{10\sqrt{29}}\right) = \arcsin\left(\frac{50}{10\sqrt{29}}\right) \simeq 68,2^\circ$$

La suma vectorial de las componentes, nos da la fuerza total en el perno A:

$$\vec{F}_A = \vec{F}'_A + \vec{F}''_A$$

$$\vec{F}'_A = \frac{-P}{4} \vec{j}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}''_A &= \left(\frac{M}{4r} \cdot \cos \alpha\right) \vec{i} + \left(\frac{M}{4r} \cdot \sin \alpha\right) \vec{j} = \\ &= \left(\frac{M}{4r} \cdot \frac{20}{10\sqrt{29}}\right) \vec{i} + \left(\frac{M}{4r} \cdot \frac{50}{10\sqrt{29}}\right) \vec{j} = \frac{\sqrt{29}}{58} \frac{M}{r} \left(\vec{i} + \frac{5}{2} \vec{j}\right) = 0, \text{ pues } M = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Vector: } \vec{F}_A = \frac{\sqrt{29}}{58} \frac{M}{r} \left(\vec{i} + \frac{5}{2} \vec{j}\right) - \frac{P}{4} \vec{j} = \frac{-P}{4} \vec{j}$$

$$\text{Módulo: } |\vec{F}_A| = F_A = \frac{P}{4} = 375 \text{ N}$$

Calculando el resto de pernos, análogamente y dado que todas las componentes F''_j son nulas, llegamos finalmente a:

$$F_A = F_B = F_C = F_D = 375 \text{ N}$$

En el caso general, con geometría uniforme rectangular y momento M no nulo, suele haber 2 pernos que tienen mayor carga que los otros 2 y se conocen como pernos críticos. Con ellos se calcularía la carga máxima en cada perno, el esfuerzo de aplastamiento máximo y el esfuerzo flexionante crítico en la viga. Como en este caso, cada perno soporta la misma carga, se toma su valor.

4.2 Esfuerzo cortante máximo en cada perno.

Se aplica la siguiente ecuación, extraída de “Diseño en ingeniería mecánica” de Shigley, 6ª edición, pág. 470:

Longitud ideal del tornillo-perno $L_p = L$:

$$L = L_G + H + a \cdot p = (b_i + b_e + s_i + s_e) + H + 2 \cdot p \quad (1)$$

donde:

L_G longitud desde la cabeza del tornillo hasta el final del espesor de la arandela que está antes de la tuerca.

H altura de la tuerca.

a n° de pasos = 2, según (*), ver más abajo

p paso de la tuerca

b_i espesor del primer elemento de agarre (chapa interior)

b_e espesor del segundo elemento de agarre (chapa exterior)
 s_i espesor de la arandela interior.
 s_e espesor de la arandela exterior.

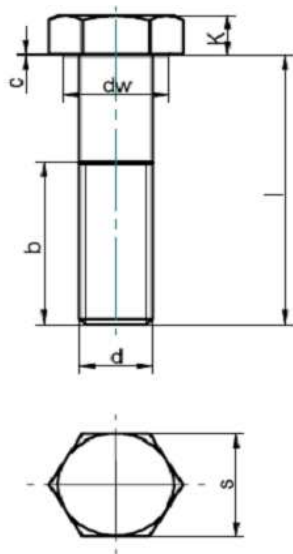


Fig. 7. Tornillo DIN 931

(*) Se cita que “la longitud ideal del tornillo es aquella donde se proyectan uno o dos hilos de la tuerca después de que se aprieta” (pág. 466). Por ello y a efectos de diseño, consideraremos el n^o de pasos que sobresalen fijos como 2, es decir, $a = 2$.

La elección de diseño es la siguiente: se redondea al valor siguiente que tenga el proveedor siempre y cuando que no sea en 1 mm. inferior, caso en que se redondee a ese valor.

Usaremos la norma de tornillo DIN 931 según ISO 4014, ver fig. 7, para diámetro M20 de rosca. Usaremos arandelas según DIN 125 y tuercas hexagonales según DIN 934 siguiendo con la recomendación ISO/R 270-19621.

Es un tornillo de cabeza hexagonal. Se utiliza en construcción mecánica. Su forma hexagonal permite, con ayuda de una llave, un apriete eficaz.

Los datos de tornillos, tuercas y arandelas son:

Tornillo	$p = 2,50$	$S = 30$	$k = 13$	$b = \begin{cases} 46 & \text{si } L \leq 125 \text{ mm} \\ 52 & \text{si } 125 < L \leq 200 \text{ mm} \end{cases}$
Tuerca	$p = 2,50$	$S = 30$	$H = 16$ (ancho)	
Arandela	$d_i = 21$	$d_e = 37$	$s = 3$ (ancho)	

De acuerdo a la ec. 1, se tiene:

$$L = (b_i + b_e + s_i + s_e) + H + 2 \cdot p = (35 + 35 + 3 + 3) + 16 + 2 \cdot 2,50 = 97 \text{ mm}$$

Por lo tanto, podríamos escoger unos pernos en el mercado de longitud $L = 100 \text{ mm}$. La calidad según la norma EN ISO 898-1 podría ser 8.8, 10.9 y 12.9. Elegimos de calidad 12.9, hechos de acero de aleación, con temple y revenido y cuyas características son:

Tornillo calidad 12.9 (valores en MPa)	
Resistencia mínima de prueba	$S_p = 970$
Resistencia tensión mínima	$S_u = 1.220$
Resistencia mínima de fluencia	$S_y = 1.100$

Nos bastará una parte roscada $L_T = b$, haciendo una equivalencia entre la norma DIN 931 y las recomendaciones del libro de diseño, ya que, en efecto, son iguales:

$$L_T = 2D + 6, \text{ para } L \leq 125 \text{ mm, es decir, } L_T = 2 \cdot 20 + 6 = b = 46 \text{ mm}$$

La parte sin rosca es: $L_D = L - L_T = 100 - 46 = 54 \text{ mm} < 35 \cdot 2 = 70$, por lo que habrá parte de la rosca en el interior de la chapa que no esté roscada.

Existe una pequeña discrepancia entre las recomendaciones de diseño del libro y la norma DIN 934 para tuercas hexagonales, en el sentido de que la altura en el libro de diseño viene como hexagonal regular (18 mm) o como gruesa - ranurada (20,3 mm), frente a los 16 mm de la norma DIN que es la que tomaremos. Elegimos para la tuerca la calidad 10.

El área del esfuerzo cortante es:

$$A_s = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi 20^2}{4} = 314,2 \text{ mm}^2$$

De esta forma, tenemos que la carga máxima en cada perno es:

$$\tau = \frac{F}{A_s} = \frac{375}{314,2} = 1,194 \text{ MPa}$$

4.3 Esfuerzo de aplastamiento máximo.

El esfuerzo de aplastamiento se debe a la presión del perno contra la pared de la base, que por simetría de hipótesis hemos puesto la misma para ambas chapas: $b_i = b_e = b = 35 \text{ mm}$

El área de aplastamiento A_b será:

$$A_b = b \cdot d = 35 \cdot 20 = 700 \text{ mm}^2$$

Por lo tanto, el esfuerzo de aplastamiento máximo será:

$$\sigma = \frac{F}{A_b} = -\frac{375}{700} = -0.536 \text{ MPa}$$

4.4 Esfuerzo crítico por flexión en la barra.

Se supone que el esfuerzo crítico por flexión en la barra sucede en una sección paralela al eje vertical y a través de los pares A, C o B, D , ya que como se ha dicho, tienen la misma carga.

Sin embargo, en este caso, no existe flexión por presencia de momentos flectores como ya se ha dicho en anteriores apartados, es decir, $\sigma = 0$, pues $M = 0$. En caso de que sí existiese una componente no nula del momento flector, el cálculo de este apartado se haría como sigue:

$$\sigma = \frac{M \cdot c}{I}$$

siendo M el momento flector, c la mitad del valor de la altura H definida en la fig. 5 e I la inercia referida a una sección paralela al eje y , a través de los dos pernos más críticos que existieran.

El cálculo del segundo momento de inercia del área a través de esta sección se obtendría mediante:

$$I = I_{barra} - 2 \cdot (I_{agujero} + d^2 \cdot A)$$

siendo d la distancia de cada perno crítico al eje de abscisas que pasa por el centro geométrico O y A el área transversal de la sección que es igual al producto del espesor de la barra multiplicado por el diámetro del agujero.

4.5 Reparto de la carga solo entre 2 pernos.

Anteriormente se ha tomado la hipótesis de que la carga cortante se repartía entre los 4 pernos. Supongamos ahora que la carga cortante se reparte solo entre 2 pernos. En estos casos, se debería observar cual conjunto de pernos alineados en torno a un eje vertical paralelo al eje y sufre más palanca, es decir, soporta más par, debido a la mayor distancia de separación de la carga hasta dicha sección. Como según la fig. 5, las cargas pasan por igual entre los dos pernos $A - C$ y $B - D$, tomaremos, por ejemplo, el conjunto $A - C$.

En este caso, tendríamos:

4.5.1 Carga total en pernos A-C.

$$F' = \frac{P}{2} = 750 \text{ N}$$
$$F'' = \frac{M \cdot r}{2r^2} = \frac{M}{2r} = 0, \text{ pues } M \text{ sigue siendo nulo, siendo } r = 40 \text{ mm, que es la distancia entre centros de pernos } A - C.$$
$$F = 750 \text{ N} \quad (\text{el doble que antes})$$

4.5.2 Carga máxima en cada perno.

$$\tau = \frac{F}{A_s} = \frac{750}{314.16} = 2,387 \text{ MPa} \quad (\text{el doble que antes})$$

4.5.3 Esfuerzo de aplastamiento máximo.

$$\sigma = \frac{F}{A_b} = -\frac{750}{700} = -1,071 \text{ MPa (el doble que antes)}$$

4.5.4 Esfuerzo crítico por flexión en la barra.

$$\sigma = 0 \text{ (igual que antes)}$$

En definitiva, si queremos preparar un conjunto de pernos para resistir mecánicamente las cargas cortantes se debe preparar una geometría que sepamos analizar. Una forma fácil es una geometría de tipo rectangular. Siempre nos tendremos que situar en la peor de las condiciones y es que si los pernos no se preparan con cuidado pudiera ser que solo resistieran a cortante 2. En esta situación particular con los datos de este problema, observamos que el análisis arroja un incremento del doble en las cargas máximas y esfuerzos soportados. En ocasiones en que existan momentos flectores como reacción a las cargas y la componente F'' no sea nula, el incremento para resistir solo 2 pernos será superior al doble. Normalmente para resistir el cortante a fricción se insertan arandelas entre los elementos en contacto. En el presente caso, se han interpuesto 2 arandelas, una en el contacto de la cabeza del tornillo con una de las chapas, la interna y otra entre la chapa externa y la tuerca.

4.6 Comprobación de la resistencia de los pernos y la métrica M20.

Para asegurar la resistencia de los pernos, vamos a situarnos en el primer caso estudiado en el que los 4 pernos resisten uniformemente a cortante.

La tracción mayor, que es la tendencia a flectar la viga en el centro por efecto de las cargas y a separar los tornillos, ocurre por igual en este caso en todos los pernos y valía $F = 375 \text{ N}$. Para un coeficiente de fricción de acero sobre acero $\eta = 0,25$, la precarga del perno tiene que ser de al menos:

$$\frac{F}{\eta} = \frac{375}{0,25} = 1.500 \text{ N}$$

Para un factor de diseño de $n_d = 2$, la tensión inicial F_i en el perno debe ser de:

$$F_i = n \cdot \frac{F}{\eta} = 3.000 \text{ N}$$

Para un grado métrico de 12.9 con $\zeta_1 = 0,75$ y $S_p = 970 \text{ MPa}$, se tiene:

$$F_i = \zeta_1 \cdot S_p \cdot A_t \Rightarrow A_t = \frac{F_i}{\zeta_1 \cdot S_p} = \frac{3.000}{0,75 \cdot 970} = 4,12 \text{ mm}^2$$

Entonces vemos de la tabla 8.1 del citado libro de diseño, que bastaría un tornillo M3 x 0,5. Ahora bien, no existe grado 12.9 para esta métrica, luego reducimos el grado a 8.8 y recalculamos.

Para un grado métrico de 8.8 con $\zeta_1 = 0,75$ y $S_p = 600 \text{ MPa}$, se tiene:

$$F_i = \zeta_1 \cdot S_p \cdot A_t \Rightarrow A_t = \frac{F_i}{\zeta_1 \cdot S_p} = \frac{3.000}{0,75 \cdot 600} = 6,67 \text{ mm}^2$$

En la tabla 8.1 del libro de diseño, vemos que bastaría un tornillo M3.5 x 0,6, con área de esfuerzo de tensión $A_t = 6,78 \text{ mm}^2$, cantidad superior a la calculada anteriormente. No obstante, por ser una cantidad tan cercana, se optaría por tomar la siguiente métrica. En definitiva, nos bastaría con una **M4 x 0,7 de grado 8.8** para resistir las cargas puntuales de este problema, en lugar de la M20 x 2,5 de grado 12.9 supuesta inicialmente.

Comprobación para las cargas puntuales de $P = 1.500 \text{ N}$, calculando el problema inverso, es decir, sabiendo que tenemos **M4 x 0,7 de grado 8.8** en los pernos, ¿cuál sería la carga puntual máxima P que aguantaría las vigas según el diagrama del problema?

$$A_t = \frac{F_i}{\zeta_1 \cdot S_p} = \frac{n \cdot \frac{P}{4}}{\zeta_1 \cdot S_p} = \frac{n \cdot \left(\frac{P}{4}\right)}{\zeta_1 \cdot S_p} = \frac{n \cdot P}{4 \cdot \eta \cdot \zeta_1 \cdot S_p} < A_{t(\text{máximo})} = 8,78 \text{ mm}^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow P < \frac{A_{t(\text{máximo})} \cdot 4 \cdot \eta \cdot \zeta_1 \cdot S_p}{n} = \frac{8,78 \cdot 4 \cdot 0,25 \cdot 0,75 \cdot 600}{2} = 1.975,5 \text{ N}$$

Como teníamos cargas puntuales de valor para P de 1.500 N (aunque haya 2 puntuales y una carga uniformemente repartida, el valor de P es ése), los tornillos resistirían con esa métrica, como queda comprobado.

Sin embargo, dado que las cargas puntuales de 1.500 N parecen pequeñas, supongamos ahora, qué ocurriría si esas cargas fueran 10 veces superiores, es decir, si $P = 15.000 \text{ N}$:

1º) La flecha calculada en el centro sería 10 veces mayor, pero la ecuación preceptiva de flecha máxima no se cumpliría manteniendo la longitud y el perfil. En este caso, la reducción de la longitud de la viga no podría hacerse con el mismo perfil, puesto que se acortaría en exceso para asegurar el cumplimiento, por lo que necesariamente habría que tomar otro perfil superior.

¿A qué perfil nos deberíamos ir? Manteniendo $L = 4.000 \text{ mm}$ y como $l = 2L = 8.000 \text{ mm}$, tendríamos:

$$\frac{11}{48} \frac{PL^3}{EI} = \frac{2L}{300} \Rightarrow I = \frac{275}{8} \frac{PL^2}{E} = 39.285.714 \text{ mm}^4$$

Tendríamos que elegir un perfil **HEA 220** de $I = 54.100.000 \text{ mm}^4$, bastante superior al nuestro de HEA 140 de $I = 10.300.000 \text{ mm}^4$

2º) El valor de la tensión inicial también sería 10 veces mayor:

$$F_i = n \cdot \frac{P}{4} = 30.000 \text{ N}$$

3º) Para un grado métrico de 12.9 con $\zeta_1 = 0,75$ y $S_p = 970 \text{ MPa}$, se tiene también un valor 10 veces mayor:

$$F_i = \zeta_1 \cdot S_p \cdot A_t \Rightarrow A_t = \frac{F_i}{\zeta_1 \cdot S_p} = \frac{30.000}{0,75 \cdot 970} = 41,24 \text{ mm}^2$$

4º) La métrica encontrada solución del problema sería, según la tabla del libro: M10 x 1,5, que no existe para grado 12.9, luego hay que recalcular.

5º) Para un grado métrico de 8.8 con $\zeta_1 = 0,75$ y $S_p = 600 MPa$, se tiene también un valor 10 veces mayor:

$$F_i = \zeta_1 \cdot S_p \cdot A_t \Rightarrow A_t = \frac{F_i}{\zeta_1 \cdot S_p} = \frac{30.000}{0,75 \cdot 600} = 66,67 \text{ mm}^2$$

6º) La métrica solución del problema sería, en este caso, **M12 x 1,75**.

Ahora se calcularía el problema inverso, es decir, sabiendo que tenemos **M20 x 2,5 de grado 12.9** en los pernos, ¿cuál sería la carga puntual máxima P que aguantaría las vigas según el diagrama del problema?

$$\begin{aligned} A_t &= \frac{F_i}{\zeta_1 \cdot S_p} = \frac{n \cdot \frac{E}{\eta}}{\zeta_1 \cdot S_p} = \frac{n \cdot \left(\frac{P}{4}\right)}{\zeta_1 \cdot S_p} = \frac{n \cdot P}{4 \cdot \eta \cdot \zeta_1 \cdot S_p} < A_{t(\text{máximo})} = 245 \text{ mm}^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow P &< \frac{A_{t(\text{máximo})} \cdot 4 \cdot \eta \cdot \zeta_1 \cdot S_p}{n} = \frac{245 \cdot 4 \cdot 0,25 \cdot 0,75 \cdot 970}{2} = 89.118,75 \text{ N} \end{aligned}$$

Esta carga se equivale a kg de masa, fácilmente:

$$P = m \cdot g \Rightarrow m = \frac{P}{g} = \frac{89.118,75}{9,81} = 9.084,48 \text{ kg} = 9,1 \text{ T}$$

En definitiva, la viga con pernos **M20 x 2,5 y grado 12.9** no podría aguantar un peso igual o superior a 9,1 T que provocara cargas puntuales equivalentes en los puntos indicados en el diagrama de la fig. 1 con los pernos indicados suponiendo que los pernos resisten por igual la carga cortante y poniéndonos en el peor de los casos, con solo 2 pernos resistiendo, no podría soportar una carga igual o superior a 4,55 T de peso.

Estudiemos ahora el resultado para **M20 x 2,5 de grado 8.8**, para comparar:

$$\begin{aligned} P &< \frac{A_{t(\text{máximo})} \cdot 4 \cdot \eta \cdot \zeta_1 \cdot S_p}{n} = \frac{245 \cdot 4 \cdot 0,25 \cdot 0,75 \cdot 600}{2} = 55.125 \text{ N} \\ P &= m \cdot g \Rightarrow m = \frac{P}{g} = \frac{55.125}{9,81} = 5.619,27 \text{ kg} = 5,6 \text{ T} \end{aligned}$$

Ahora la viga con pernos **M20 x 2,5 y grado 8,8** no podría aguantar un peso igual o superior a 5,6 T que provocara cargas puntuales equivalentes en los puntos indicados en el diagrama de la fig. 1 con los pernos indicados suponiendo que los pernos resisten por igual la carga cortante y poniéndonos en el peor de los casos, con solo 2 pernos resistiendo, no podría soportar una carga igual o superior a 2,8 T de peso.

5 Cálculo de la carga total o resultante en cada perno (cargas puntuales y cargas uniformemente repartidas).

1. Carga directa o cortante primario F' .

Lo único que varía es el valor de la carga.

$$F'_A = \dots = F'_D = F' = \frac{3P}{4} = \frac{3}{8}P = 562,5 \text{ N}$$

2 Se halla la carga del momento M o cortante secundario F'' .

F'' nuevamente es 0, dado que no existen momentos de empotramiento ($M = 0$) porque son apoyos articulados en los extremos.

$$F''_j = \frac{M \cdot r_j}{\sum_{i=1}^n r_i^2} = 0$$

3 Se obtiene la carga total F en cada perno.

La suma vectorial de las componentes, nos da la fuerza total en el perno A:

$$\begin{aligned}\vec{F}_A &= \vec{F}'_A + \vec{F}''_A \\ \vec{F}'_A &= \frac{-3P}{8} \vec{j}\end{aligned}$$

$$\vec{F}''_A = 0, \text{ pues } M = 0 \text{ (como antes)}$$

$$\text{Vector: } \vec{F}_A = \frac{-3P}{8} \vec{j}$$

$$\text{Módulo: } |\vec{F}_A| = F_A = \frac{3P}{8} = 562,5 \text{ N}$$

Como antes, por simetría, es igual para todos los pernos:

$$F_A = F_B = F_C = F_D = 562,5 \text{ N}$$

que significa $\frac{562,5}{375} = 1,5$ más que el planteamiento con solo cargas puntuales.

5.1 Esfuerzo cortante máximo en cada perno.

La carga máxima en cada perno es:

$$\tau = \frac{F}{A_s} = \frac{562,5}{314,2} = 1,790 \text{ MPa}$$

5.2 Esfuerzo de aplastamiento máximo.

El esfuerzo de aplastamiento máximo será:

$$\sigma = \frac{F}{A_b} = -\frac{562,5}{700} = -0.804 \text{ MPa}$$

5.3 Esfuerzo crítico por flexión en la barra.

Como antes $\sigma = 0$, pues $M = 0$.

5.4 Reparto de la carga solo entre 2 pernos.

En este caso, tendríamos:

5.4.1 Carga total en pernos A-C.

$$F = \frac{3P}{4} = 1.125 \text{ N}$$
$$\frac{1.125}{750} = 1,5 \text{ veces más que con 4 pernos}$$

5.4.2 Carga máxima en cada perno.

$$\tau = \frac{F}{A_s} = \frac{1.125}{314.16} = 3,581 \text{ MPa (1,5 veces que antes)}$$

5.4.3 Esfuerzo de aplastamiento máximo.

$$\sigma = \frac{F}{A_b} = -\frac{1.125}{700} = -1,607 \text{ MPa (1,5 veces que antes)}$$

5.4.4 Esfuerzo crítico por flexión en la barra.

$$\sigma = 0 \text{ (igual que antes)}$$

5.5 Comprobación de la resistencia de los pernos y la métrica M20.

Como antes estudiamos que los 4 pernos resisten uniformemente a cortante. Seguimos el mismo proceso:

$$\frac{F}{\eta} = \frac{562,5}{0,25} = 2.250 \text{ N}$$
$$F_i = n \cdot \frac{F}{\eta} = 4.500 \text{ N}$$

Para un grado métrico de 8.8 con $\zeta_1 = 0,75$ y $S_p = 600 \text{ MPa}$, se tiene:

$$F_i = \zeta_1 \cdot S_p \cdot A_t \Rightarrow A_t = \frac{F_i}{\zeta_1 \cdot S_p} = \frac{4.500}{0,75 \cdot 600} = 10 \text{ mm}^2$$

En la tabla 8.1 del libro de diseño, vemos que bastaría un tornillo **M5 x 0,8**, que nos bastaría para resistir las cargas puntuales y uniforme distribuidas de este problema, en lugar de la M20 x 2,5 de grado 12.9 supuesta inicialmente.

Comprobación para las cargas puntuales de $P = 1.500 \text{ N}$ junto con las uniformemente repartidas de $p \cdot 2 \cdot L = P = 1.500 \text{ N}$, calculando el problema inverso, es decir, sabiendo que tenemos **M5 x 0,8 de grado 8,8** en los pernos, ¿cuál sería la carga puntual máxima P que aguantaría las vigas según el diagrama del problema?

$$A_t = \frac{F_i}{\zeta_1 \cdot S_p} = \frac{n \cdot \frac{F}{\eta}}{\zeta_1 \cdot S_p} = \frac{n \cdot \left(\frac{3P}{8}\right)}{\zeta_1 \cdot S_p} = \frac{3 \cdot n \cdot P}{8 \cdot \eta \cdot \zeta_1 \cdot S_p} < A_{t(\text{máximo})} = 14,2 \text{ mm}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{\text{máx}} < \frac{A_{t(\text{máximo})} \cdot 8 \cdot \eta \cdot \zeta_1 \cdot S_p}{3n} = \frac{14,2 \cdot 8 \cdot 0,25 \cdot 0,75 \cdot 600}{3 \cdot 2} = 2.130 \text{ N}$$

Como teníamos cargas puntuales y uniformemente repartidas de valor $P = 1.500 \text{ N}$, los tornillos resisten con esa métrica, como queda demostrado y con un factor de seguridad de:

$$\frac{P_{\text{máx}}}{P} = \frac{2.130}{1.500} = 1,42$$

Ahora se calcularía el problema inverso, es decir, sabiendo que tenemos **M20 x 2,5 de grado 12.9** en los pernos, ¿cuál sería la carga máxima P que aguantaría las vigas según el diagrama del problema?

$$P_{\text{máx}} < \frac{A_{t(\text{máximo})} \cdot 8 \cdot \eta \cdot \zeta_1 \cdot S_p}{3n} = \frac{245 \cdot 8 \cdot 0,25 \cdot 0,75 \cdot 600}{3 \cdot 2} = 36.750 \text{ N}$$

Las carga equivalente P de la ecuación es $P = 1.500 \text{ N}$, por lo tanto resistiría con un margen de seguridad de:

$$\frac{P_{\text{máx}}}{P} = \frac{36.750}{1.500} = 24,5$$

Esta carga se equivale a kg de masa, fácilmente:

$$P = m \cdot g \Rightarrow m = \frac{P}{g} = \frac{36.750}{9,81} = 3.746,2 \text{ kg} = 3,7 \text{ T}$$

En definitiva, la viga con pernos **M20 x 2,5 y grado 12.9** no podría aguantar un peso igual o superior a 3,7 T que provocara cargas puntuales equivalentes en los puntos indicados en el diagrama de la fig. 1 junto con cargas uniformemente repartidas con los pernos indicados suponiendo que los pernos resisten por igual la carga cortante y poniéndonos en el peor de los casos, con solo 2 pernos resistiendo, no podría soportar una carga igual o superior a 1,85 T de peso.

6 Cálculo según el DB SE-A del CTE.

Se requieren dos tipos de verificaciones de acuerdo a DB SE 3.2, las relativas a:

- La estabilidad y la resistencia (estados límite últimos).
- La aptitud para el servicio (estados límite de servicio).

Para un perfil HEA 140, tenemos los siguientes valores:

$$h = 133 \text{ mm} \quad b = 140 \text{ mm} \quad s = 5,5 \text{ mm} \quad I_x = 10.300.000 \text{ mm}^4$$

$$w_1 = 0 \text{ mm} \quad w_2 = 32,5 \text{ mm} \quad d = 21 \text{ mm} \quad t = 8,5 \text{ mm}$$

6.1 a) Resistencia de un tornillo.

La ecuación para el cálculo de la resistencia de un tornillo según el cálculo a deslizamiento con tracción y cortante es:

$$F_{s,Rd} = \frac{K_s n \mu (F_{p,cd} - 0,8 F_{t.Ed.Ser})}{\gamma_{M3}}$$

donde:

K_s es un coeficiente $\left\{ \begin{array}{l} 1,00 \text{ agujeros normales, que tomaremos} \\ 0,85 \text{ agujeros sobremedidos o rasgados cortos} \\ 0,70 \text{ agujeros rasgados largos} \end{array} \right.$

n es el nº de superficies de rozamiento, que serán 6: tornillo, arandela ext., chapa 1, chapa 2, arandela int. y tuerca.

μ es el coeficiente de rozamiento, que tomaremos como 0,40.

$F_{p,cd}$ es la fuerza de pretensado, $F_{p,cd} = 0,7 f_{yb} A_s$

$F_{t.Ed.Ser}$ es el esfuerzo axial de cálculo en servicio

6.2 Coeficientes parciales de seguridad γ_M

Según el apartado 2.3.3 *Coeficientes parciales de seguridad para determinar la resistencia*

1 Para los coeficientes parciales para la resistencia se adoptarán, normalmente, los siguientes valores:

a) $\gamma_{M0} = 1,05$ coeficiente parcial de seguridad relativo a la plastificación del material

b) $\gamma_{M1} = 1,05$ coeficiente parcial de seguridad relativo a los fenómenos de inestabilidad

c) $\gamma_{M2} = 1,25$ coeficiente parcial de seguridad relativo a la resistencia última del material o sección, y a la resistencia de los medios de unión

d) $\gamma_{M3} = 1,1$ coeficiente parcial para la resistencia al deslizamiento de uniones con tornillos pretensados en Estado Límite de Servicio.

$\gamma_{M3} = 1,25$ coeficiente parcial para la resistencia al deslizamiento de uniones con tornillos pretensados en Estado Límite de Último (tomaremos este valor)

$\gamma_{M3} = 1,4$ coeficiente parcial para la resistencia al deslizamiento de uniones con tornillos pretensados y agujeros rasgados o con sobremedida.

6.3 b) Estados límites de servicio.

Según 2.4 *Estados límite de servicio:*

2.4.1 *Condiciones que deben verificarse*

1 Se considera que hay un comportamiento adecuado, en relación con las deformaciones, las vibraciones o el deterioro, si se cumple, para las situaciones

de dimensionado pertinentes, que el efecto de las acciones no alcanza el valor límite admisible establecido para el mismo de acuerdo a DB SE 4.3.

Y en el apartado 4.3, se lee:

4.3 Tornillos, tuercas y arandelas.

1 En la tabla 4.3 se resumen las características mecánicas mínimas de los aceros de los tornillos de calidades normalizadas en la normativa ISO.

Tabla 4.3 Características mecánicas de los aceros de los tornillos, tuercas y arandelas

Clase	4.6	5.6	6.8	8.8	10.9
Tensión de límite elástico f_y (N/mm^2)	240	300	480	640	900
Tensión de rotura f_u (N/mm^2)	400	500	600	800	1.000

6.4 Resistencia de cálculo.

Usando para la viga un material laminado en caliente S275-J2G3, según UNE EN-10025, tenemos para un espesor de alma $t = 5$.

- Elástica.

$$f_{yd} = \frac{f_y}{\gamma_{M0}} = \frac{275}{1,05} = 261,9 \frac{N}{mm^2}$$

- Última.

$$f_{ud} = \frac{f_u}{\gamma_{M2}} = \frac{390,5}{1,25} = 312,4 \frac{N}{mm^2}$$

Cálculo de la fuerza de pretensado, para cada tornillo:

$$F_{p,cd} = 0,7 f_{yb} A_s = 0,7 \left(\frac{f_{ub}}{\gamma_M} \right) A_s$$

Según la norma DIN13, tenemos:

$\phi(mm)$	16	20	22	24	27	30
A_s	157	245	303	353	459	561

Por lo tanto:

$$F_{p,cd} = 0,7 \left(\frac{800}{1,1} \right) 245 = 124.727,30 \text{ Nmm} = 124,73 \text{ Nm}$$

Como no hay esfuerzos axiales, el término $F_{t.Ed.Ser} = 0$.

6.5 Resistencia del tornillo a deslizamientos en la sección media:

$$F_{s,Rd} = \frac{1 \cdot 6 \cdot 0,40 \cdot (124,73)}{1,25} = 239,48 \text{ Nm}$$

Como tenemos calculado el momento flector en la sección que es:

$$M(L) = \frac{3PL}{4} = \frac{3 \cdot 1.500 \cdot 4000}{4} = 4.500.000 \text{ Nmm} = 4.500 \text{ Nm}$$

No se cumple: $F_{s,Rd} < M(L) \rightarrow$ **el tornillo no resiste a deslizamientos**, $\frac{4.500}{239,48} = 18,8$ veces más, luego se confirma que existirán desplazamientos, en dicha sección debida a la flecha: la viga flectará. Para que no flectase, el valor de P' debería ser de:

$$\frac{4.500}{239,48} \simeq 18,8 \rightarrow \frac{1.500}{P'} = 18,8 \rightarrow P' = 79,8 \text{ N}$$

6.6 Resistencia a corte en la sección media

Se debe cumplir que:

$$V_{Ed} < V_{pl,Rd} = A_v \cdot \frac{f_{yd}}{\sqrt{3}}$$

siendo V_{Ed} el valor de cálculo de las cargas verticales totales en la planta considerada y en todas las superiores que coincide con el axil total en los pilares de la planta y que es una valor desconocido en este problema.

Perfiles en I o H cargados paralelamente al alma : $A_v = A - 2bt_f + (t_w + 2r)t_f \simeq ht_w = 140 \cdot 5,5 = 770 \text{ mm}$

$$V_{Ed} = \frac{P}{2} = \frac{1500}{2} = 750 \text{ N}$$

$$V_{pl,Rd} = A_v \left(\frac{f_{yd}}{\sqrt{3}} \right) = ht_w \left(\frac{f_{yd}}{\sqrt{3}} \right) = 770 \cdot \frac{640}{\sqrt{3}} = \frac{492.800\sqrt{3}}{3} \text{ N}$$

$$\text{Por lo tanto } V_{Ed} \text{ debe cumplir: } V_{Ed} < \frac{492.800\sqrt{3}}{3}$$

6.7 Comprobación esbeltez en la sección media

Clase 2 \rightarrow solicitaciones: comportamiento plástico, resistencia: comportamiento plástico o elástico.

Límite esbeltez.

Según la tabla 5.3 Límites de esbeltez para elementos planos, apoyados en dos bordes, total o parcialmente:

$$\frac{c}{t} \leq 83\varepsilon = 83\sqrt{\frac{235}{f_y}} = \text{factor de reducción}$$

$$\frac{c}{t} = \frac{w_2+w_1+\frac{d}{2}}{t} = \frac{32,5+0+\frac{21}{2}}{8,5} = 5,059$$

donde se ha considerado w_2 , w_1 y d las correspondientes a las tablas de perfiles laminados HEA 140, para hallar la distancia c , y que están escritas al principio de este apartado.

$$83\sqrt{\frac{235}{f_y}} = 83\sqrt{\frac{235}{640}} = 50,295$$

$$\text{Cumple: } 5,059 \leq 50,295$$

6.8 Resistencia a flexión sección media.

$$M_{c,Rd} = M_{pl,Rd} = W_{pl} \cdot f_{yd} \text{ (clase 2)}$$

Momento resistente plástico de la sección:

$$W_{pl} = \frac{I}{y_{máx}} = -\frac{M_F}{\sigma_{máx}} \rightarrow W_{pl} = \frac{10.300.000}{-14.794} = -696.228,2 \text{ mm}^3$$

Para comparar, el módulo resistente elástico del perfil es: $W_x = -155.000 \text{ mm}^3$

6.9 Estados límite último.

Criterio de Von Mises para plasticidad:

$$\sqrt{\sigma_{xd}^2 + \sigma_{zd}^2 - \sigma_{xd} \cdot \sigma_{zd} + 3\tau_{xzd}^2} \leq f_{yd} \quad (2)$$

Por ser flexión simple, tenemos:

$$\sigma_{zd} = 0$$

Además, no existen momentos **torsores** ni cargas que las induzcan dado que las cargas puntuales y las uniformemente repartidas sobre la viga están centradas sobre el eje y en el plano xy.

Luego:

$$\tau_{xzd} = 0$$

Por lo tanto la expresión de Von Mises, queda simplificada como sigue:

$$\sigma_{xd} \leq f_{yd} \quad (3)$$

Tensión normal:

$$\sigma_{xd} = \left| \frac{M_x}{I_x} y \right| \rightarrow \text{eje neutro: } \sigma_{xd} = 0 \rightarrow y = 0 \text{ (lógico por simetría)}$$

$$\sigma_{xd, \text{máx}(y=L)} = \left| \frac{-4.500.000}{10.300.000} \cdot 2.000 \right| = 873,8 \frac{N}{mm^2}$$

$873,8 > 261,9 \rightarrow$ **No cumple**

¿Cuál es la mínima carga que permite que se verifique la condición de Mises?

Desarrollando la ecuación anterior con las variables de donde proceden, queda:

$$\frac{M(L)}{I_x} L \leq \frac{f_y}{\gamma_{M0}} \rightarrow \frac{3PL^2}{4I_x} \leq \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

Podemos actuar de varias formas:

1. Reduciendo P .
2. Aumentando I_x . Entonces debemos cambiar de perfil y recalcular.
3. Aumentando f_y , es decir, eligiendo un material más resistente; en lugar del S-275 J2G3, un acero S-355 J2G3. Nótese que estamos eligiendo un acero según norma UNE EN-10025 y para una intensidad de impacto Charpy de 27 J a -20 °C (J2G3)

Manteniendo I_x y f_y , calculemos el valor de P máximo que verifica la condición estado límite último.

$$P_{\text{máx}} \leq \frac{4f_y I_x}{3L^2 \gamma_{M0}} = \frac{4 \cdot 261,9 \cdot 10.300.000}{3 \cdot 4.000^2 \cdot 1,05} = 214,1 \text{ N}$$

Estamos empleando una carga:

$$\frac{1.500}{214,1} = 7 \text{ veces mayor que la máxima admisible por Von Mises.}$$

Finalmente, consideremos la carga $P_{\text{máx}} = 210 \text{ N}$ (un poco menos que la calculada arriba para hacer números redondos) y recalculamos todo lo que cambia:

6.10 Nueva resistencia del tornillo a deslizamientos en la sección media.

$$M(L) = \frac{3PL}{4} = \frac{3 \cdot 210 \cdot 4000}{4} = 630.000 \text{ Nmm} = 630 \text{ Nm}$$

No se cumple: $F_{s,Rd} > M(L) \rightarrow 239,48 < 630$, luego, **el tornillo no resiste a deslizamientos**, $\frac{630}{239,48} = 2,6$ veces más, luego se confirma que existirán desplazamientos, en dicha sección debida a la flecha: la viga flectará, pero mucho menos que antes ($\frac{18,8}{2,6} = 7,2$ veces menos), luego los tornillos no sufrirán tanto.

6.11 Nueva resistencia a corte en la sección media.

Se debe cumplir que:

$$V_{Ed} < V_{pl,Rd} = A_v \cdot \frac{f_{yd}}{\sqrt{3}}$$

Perfiles en I o H cargados paralelamente al alma : $A_v = A - 2bt_f + (t_w + 2r)t_f \simeq ht_w = 133 \cdot 5,5 = 731,5 \text{ mm}$

$$V_{pl,Rd} = A_v \left(\frac{f_{yd}}{\sqrt{3}} \right) = ht_w \left(\frac{f_{yd}}{\sqrt{3}} \right) = 731,5 \cdot \frac{640}{\sqrt{3}} = \frac{468.160\sqrt{3}}{3}$$

Se debe verificar $V_{Ed} < \frac{468.160\sqrt{3}}{3}$

6.12 Nueva resistencia a flexión sección media.

$$M_{c,Rd} = M_{pl,Rd} = W_{pl} \cdot f_{yd} \text{ (clase 2)}$$

Momento resistente de la sección:

$$W_{pl} = \frac{I}{y_{máx}} = -\frac{M_F}{\sigma_{máx}} \rightarrow \text{se debe recalcular la nueva flecha}$$

El valor de la flecha f para $P = 210 \text{ N}$ vale:

$$f = y (x_{EI\theta=0} = L) = -\frac{1}{3} \frac{PL^3}{EI} = -2,071 \text{ mm}$$

El valor de f se ha reducido en $\frac{14,794}{2,071} = 7$ veces, que va pareja a la reducción de la carga P .

Por lo tanto, el nuevo módulo resistente plastificado es:

$$W_{pl} = \frac{I}{y_{máx}} = -\frac{10.300.000}{2,071} = -4.973.442 \text{ mm}^3$$

El módulo resistente se ha aumentado también en $\frac{4.973.442}{696.228,2} = 7$ veces, cantidad que concuerda con el decrecimiento de la flecha, como debería ser y es.

Por lo tanto, el perfil HEA 140 cumple con tornillería M20 para una carga $P = 210 \text{ N}$

7 Conclusión final.

Se debe notar que por el cálculo hecho por libros de diseño en ingeniería, no sería necesario poner tornillos de métrica M20, sino que bastarían otros de menor métrica, como ya se vio.

La viga de perfil HEA 140 con cargas puntuales y uniformemente repartidas de valor $P = 1.500 \text{ N}$ con 4 pernos de características:

M5 x 0,8 de grado 8.8

con un factor de seguridad de 1,42, resiste en cuanto a pernos.

Sin embargo, el perfil **HBA 140** de la viga no resiste con cargas de $P = 1.500 \text{ N}$ más que hasta 210 N . Por lo tanto, si queremos emplear aquella carga, $P = 1.500 \text{ N}$, debemos elegir una inercia tal que:

$$I_x = \frac{3P_{\text{máx}}L^2\gamma_{M0}}{4f_y} = \frac{3 \cdot 1.500 \cdot 4.000^2 \cdot 1,05}{4 \cdot 261,9} = 72.164.948 \text{ mm}^4$$

Buscando en los prontuarios, encontramos que el perfil que encaja es el:

HEA 500, con $I_x = 86.970.000 \text{ mm}^4$

en lugar de HEA 140.

Ahora se debería recalcular la flecha máxima de la viga con esta rigidez, para comparar.

$$f = y(x_{EI\theta=0} = L) = -\frac{1}{3} \frac{PL^3}{EI} = -0,175 \text{ mm}$$

Como:

$0,175 < 26,667 \rightarrow$ cumple el nivel preceptivo para $\frac{l}{300}$ de flechas máximas

que entra dentro de la lógica de flechas admisibles, reduciéndola $\frac{14,794}{0,175} = 84,5$ veces.

Nótese que parece excesivo emplear un perfil HEA tan elevado, y máxime cuando la flecha son 2 décimas de mm, pero el cálculo está bien hecho para $P = 1.500 \text{ N}$. Sin embargo, esto sale de aplicar Von Mises.